

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS

École Doctorale : Sciences Fondamentales et Appliquées

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

dans la spécialité : **ACOUSTIQUE PHYSIQUE**

par

Olivier XERIDAT

**ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE LA PROPAGATION,
DE LA DIFFUSION ET DE LA LOCALISATION
DES ONDES DE LAMB**

Soutenu le 7 novembre 2011 devant la commission composée de :

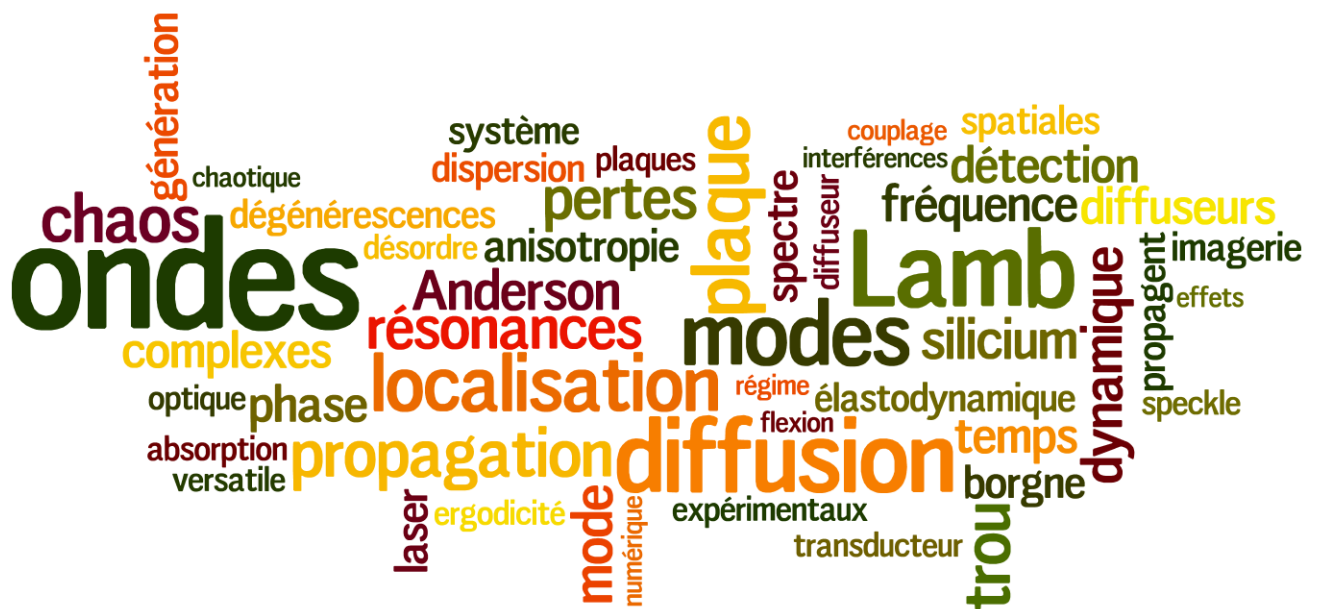
B. AUDOIN	Professeur, Université Bordeaux I	<i>Rapporteur</i>
S. CATHELIN	Maître de Conférences, Université Grenoble I	
O. LEGRAND	Professeur, Université de Nice	<i>Président</i>
C. PRADA	Directrice de Recherche, Université Paris VII	<i>Rapporteur</i>
P. SEBBAH	Chargé de Recherche, Université Paris VII	<i>Directeur de thèse</i>
C. VANNESTE	Directeur de Recherche, Université de Nice	

à 14 heures au Laboratoire Physique de la Matière Condensée

A Claire et Antoine,

*« Si en te baignant tu as échappé au crocodile,
prends garde au léopard sur la berge... »*

Proverbe africain



Remerciements

Ce travail de thèse n'aurait pu aboutir sans l'aide et le soutien précieux de nombreuses personnes que je souhaite remercier à travers ces quelques pages. Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse, Patrick Sebbah, qui m'a offert l'opportunité de vivre cette aventure et en particulier de la débiter dans des conditions idylliques : une semaine de séminaire les pieds dans l'eau, à Cargèse, on a vu pire... et même si tout n'a pas été aussi "ensoleillé" durant ces 4 années, je garderai au final un bon souvenir de cette expérience.

Merci aux personnes qui ont apporté leur précieuse contribution à ce travail : l'équipe photonique et les techniciens du LAAS (O. Gauthier-Lafaye, D. Belharet, S. Bonnefont, F. Lozes-Dupuys) pour la gravure des échantillons, Emmanuel Bossy de l'institut Langevin pour les simulations 3D, toute l'équipe Propagation des Ondes en Milieux Complexes du LPMC (Fabrice, Olivier, Christian, Valérie, Charles, Claire), Xavier Noblin pour la fabrication des élastomères, Richard Weaver, Thomas Seligman et Ulrich Kuhl pour leur intérêt et les commentaires pertinents au sujet de la manip. J'adresse également une pensée particulière aux regrettés Dédé et Richard qui ont contribué chacun à leur manière à améliorer le dispositif expérimental.

Je tiens par ailleurs à remercier Claire Prada et Bertrand Audoin d'avoir accepté d'être les rapporteurs du manuscrit et d'y avoir porté un intérêt particulier, même si certaines problématiques ne leur étaient pas familières. Merci aux autres membres du jury : Stefan Catheline, Patrick, Christian et Olivier qui m'a fait l'honneur de présider ce jury. Merci à mes "coachs" de l'avant veille pour la préparation de l'oral : Fabrice, tonton BaB, Jean-Pierre, Jean, Mourad et Xavier. Je remercie également mes "Bernard Pivot" : Christian, Olivier, Patrick, Bertrand Audoin et mon papa. Grâce à vous mon manuscrit ne comporte que très peu de fotes d'ortographe!

Les conditions de travail au LPMC et en particulier les relations humaines, m'ont grandement aidé à mener à bien ce projet. Je remercie les deux directeurs du laboratoire que j'ai vu se succéder : tout d'abord Gérard, sans qui je n'aurais pas eu de bourse ! Puis Fabrice, qui m'a toujours apporté son soutien durant toute ma thèse. Un grand merci également à Mourad qui a appuyé ma candidature pour l'obtention du poste ATER. Merci à Philippe Lethuc pour son aide précieuse et sa gentillesse durant cette année d'enseignement à l'IUT. J'en garde un très bon souvenir.

Multumesc^a aux secrétaires du labo Nathalie, Christine U., Christine B., Denise, Angélique ainsi qu'à notre MacGyver de l'informatique : Gayp. *Chokrane* aux permanents Xavier, Christophe, Wilfried, Franck C., Tonton BaB, Dream Thea-Seb, Franck M., Valérie, Pierre, François, Elisabeth, Pavel et aux "temporaires" que j'ai côtoyés avec plaisir : Nadir, Kiran, l'oncle Sam, Louis, Johan, Anthony, Fred, Florian, Florence. Un *obrigado* particulier à Claire M², fraîchement permanente, qui m'a été d'un grand secours pour la soutenance !

La thèse, c'est beaucoup de travail, mais il faut parfois faire des pauses et se détendre : pauses café, parties de baballe, apéro, humour potache, re-apéro, percussions sur tout ce qui est à portée de mains et de pieds (je sais que je ne vais pas manquer à certains de ce point de vue là ...). Quelques pauses sportives avec les footeux du lundi : Yéyé, Guillaume, Jean-Mi, Xavier, Francky, Stan, Nad', Fred, Pascal, Greg, Christophe. A ce propos si quelqu'un retrouve mon ligament croisé antérieur gauche ça m'intéresse ! D'autres pauses théâtrales : *takk* aux membres des deux ateliers théâtre de l'université auxquels j'ai participé. Ça commence à faire beaucoup de pauses... tant pis, je rajoute les détente musicales : j'ai eu le plaisir pendant une année de participer à l'atelier Jazz de l'université. *Dhanyavad* à Olivier, Wilfried, François, Bernard et le grand chef David. Ça c'est le côté Dr Jekyll. Le Mr Hyde qui sommeille en moi (il a le sommeil léger...) a pu largement s'exprimer avec les autres membrés du groupe Métamorphose : big poutous à MétaGuiGuitare, Métabass Bébert et Métagratte Denis.

a. le quota de "merci" ayant été dépassé, je suis contraint de faire appel à d'autres versions du mot dans différentes langues

Spéciale dédicace au bureau 2.22, l'endroit où j'ai passé le plus clair de mon temps durant ces 4 années. Premier lascar : Charles, alias Choupinet. Parmi tous les bons moments passés ensemble, j'en retiendrais deux : tes doses généreuses de Ricard (en d'autres mots tes parts de flamby) et cette fameuse soirée de la galette à la chips qui a inauguré notre mois de vie commune. Cet épisode en aurait découragé plus d'un mais tu as tenu bon, pugnace que tu es ! *Gracias* pour tous ces bons repas "pain + fromage" et les variantes comme par exemple... "fromage + pain" !

Deuxième larron : Jérôme, alias Yéyé, compagnon de bureau, de théâtre, de musique et surtout de calvitie précoce (mais qui de nous deux sera chauve en premier ?). Au fait Yéyé, tu disais dans ta thèse en parlant de moi "il continue à supporter une équipe qui n'a rien gagné depuis 17 ans"...tu apprendras qu'il ne faut jamais provoquer un marseillais : 5 titres ces deux dernières années et certainement la ligue des champions en mai prochain (c'est beau de rêver), ça te va comme réponse ? Allez l'OM !

Le départ de ces deux zigotos a laissé un grand vide dans le bureau et leur remplacement s'annonçait délicat. Et pourtant, Valoche et Amandoché ont relevé le défi avec brio, amenant cette touche de féminité qui manquait tant au bureau. Qui dit femme dit élégance, raffinement et délicatesse, en voici pour preuve une phrase qu'aurait très bien pu prononcer Valérie : "Va n***er ! j'veis l'tabouler ce PC de m***e !". Je n'en dirai pas plus par peur de représailles sous forme de plaquage ou autre lancer de baballe en plein poire ! J'espère en tout cas que tu continueras à rire aux éclats et à faire trembler les murs du bureau, pour le plus grand bonheur de nos voisins.

Amandine, tu as su balayer l'image de "lère de la classe" que j'avais de toi. Oups, j'aurais du employer un autre terme, c'est maladroit de réduire les aptitudes d'une femme au simple maniement du balai...je veux dire que tu as nettoyé, assaini mon esprit de cette fausse image que je me faisais de toi. Je m'enfonce ? Je suis sûr que tu ne m'en voudras pas grâce à ton sens de l'humour, volontiers second degré. A ce propos, penses-tu que l'Afrique restera longtemps dans l'attente d'une lutte passive ? Je finirai les filles par vous rappeler qu'il n'y a pas que les amusements dans la vie : n'oubliez pas qu'autour du patio, il y a un labo tout de même...^b

b. certains reconnaîtront l'allusion à cette charmante maison d'hôte aux pratiques...obscurés !

Je ne peux citer le 2.22 sans penser à Laurent, alias Lolo le razacois doté d'un sens de l'improvisation et d'un humour remarquables. En même temps pour supporter les girondins de Bordeaux ces derniers temps, il faut faire preuve de beaucoup d'humour !

Guillaume fait également partie de l'histoire du 2.22, parce qu'il suffit qu'il y ait une boîte de bonbons ou un peu de nourriture dans un tiroir pour qu'il fasse entre 15 et 20 passages quotidiens dans le bureau. Tu m'as démontré très cher Guitou qu'un homme pouvait avoir le rire d'un sanglier et ça c'est fort ! En tout cas bravo pour ton double succès : docteur et professeur agrégé en deux jours ouvrés, c'est la classe ! Tu n'as au final qu'un seul gros défaut qui est celui de supporter le mauvais Olympique...

J'adresserai mes derniers remerciements à ma famille et mes proches, qui ont été d'un soutien sans faille tout au long de ma thèse. *Arigatô gozaimasu* à tous ceux qui ont fait le déplacement le jour de la soutenance.

Mèsi à Stéphane et Nicole de m'avoir chouchouté pendant la dure période de la rédaction ! Vivre avec l'ours grognon que j'ai été n'a pas du être facile tous les jours...

Gràcies à papa et maman, les meilleurs parents que j'ai jamais eu ! J'entends par là que j'aurais pas rêvé mieux... par contre, fini les mauvaises surprises, on se tient à carreau maintenant tous les deux, ok ?

Ngiyabonga mon frerot de m'avoir offert ce bon bol d'air frais pendant ma rédaction ! Sonisphere rules ! Essaie d'être là à l'heure la prochaine fois ;-)

Un dernier *chnorakaloutioun* à toi ADMV, qui a supporté ma mauvaise humeur et mon grognougnage durant ces longs mois ! Tu fais partie des deux plus belles choses qui me soient arrivées. Pour la deuxième, un indice sur la page suivante :



Table des matières

Introduction générale	19
I Ondes élastiques de surface : réalisation expérimentale	23
I.1 Introduction et motivations	25
I.2 Ondes élastiques dans les plaques minces	26
I.2.1 Rappels d'élasticité tridimensionnelle	26
I.2.2 Ondes acoustiques de surface	31
I.2.2.1 Ondes non dispersives	32
I.2.2.2 Ondes dispersives	33
I.2.3 Ondes de plaque	34
I.2.3.1 Ondes de Lamb	34
I.2.3.1.1 Equation de Rayleigh-Lamb	34
I.2.3.1.2 Courbes de dispersion	37
I.2.3.1.3 Cas basse fréquence	43
I.2.3.2 Ondes transversales horizontales (SH)	45
I.2.4 Propagation dans les cristaux à symétrie cubique, cas parti- culier du silicium	46
I.3 Génération et détection optiques des ultrasons	52
I.3.1 Génération d'ultrasons par laser	52
I.3.1.1 Régime thermoélastique	53
I.3.1.2 Régime d'ablation	56
I.3.2 Détection sans contact	59

I.4	Dispositif expérimental	63
I.4.1	Présentation	63
I.4.1.1	Types d'échantillon et matériau	63
I.4.1.2	Dispositifs de génération des ultrasons	65
I.4.1.2.1	Excitation optique par laser impulsif	65
I.4.1.2.2	Excitation par transducteur de contact	69
I.4.1.3	La sonde laser interférométrique hétérodyne	70
I.4.1.4	Acquisition et traitement des données	74
I.4.1.5	Contrôle des pertes	76
I.4.1.5.1	Contrôle global du couplage avec l'air	77
I.4.1.5.2	Contrôle local	79
I.4.2	Exemple de mesure : courbes de dispersion expérimentales	80
I.5	Conclusion	83
II	Pertes en milieu homogène chaotique ouvert	85
II.1	Introduction et motivations	86
II.2	Le contexte du chaos ondulatoire	87
II.3	Modèle analytique	88
II.3.1	Le formalisme du hamiltonien effectif	89
II.3.2	Nature des pertes en milieux ouverts	90
II.3.3	Effets des pertes inhomogènes dans le domaine spatial	90
II.3.4	Proportionnalité entre q_n et Γ_n	91
II.4	Résultats expérimentaux	93
II.4.1	Principe de l'expérience	93
II.4.2	Évolution des propriétés spectrales	96
II.4.3	"Complexité" du quasimode	97
II.4.4	Proportionnalité entre q et Γ	102
II.5	Conclusion	103
III	Diffusion des ondes de plaque par un trou borgne	105
III.1	Introduction et motivations	107
III.2	État de l'art	107
III.3	Géométrie du problème	111

III.4 Résonances du trou : approche simplifiée	112
III.5 Modèles simplifiés de la théorie des plaques	115
III.5.1 Mouvements dans le plan : ondes S_0 et SH_0	115
III.5.2 Mouvements de flexion : onde A_0	117
III.5.2.1 Modèle de Kirchhoff	119
III.5.2.2 Modèle de Mindlin	121
III.6 Modèle de diffusion de Poisson-Kirchhoff	123
III.6.1 Développement des grandeurs en séries de Bessel	124
III.6.2 Conditions de continuité et de couplage au bord du diffuseur .	126
III.6.3 Evaluation de la section efficace de diffusion	129
III.6.4 Dépendances géométriques de la section efficace de diffusion .	132
III.7 Expériences et résultats	138
III.7.1 Échantillon à forte densité modale	138
III.7.2 Échantillon à faible densité modale	148
III.7.2.1 Fabrication de l'échantillon et protocole expérimental	148
III.7.2.2 Identification des modes et comparaison avec les mo-	
dèles théoriques	150
III.7.2.3 Levées de dégénérescence des modes	156
III.7.2.4 Phénomène de piégeage de résonances	158
III.7.2.5 Modes chaotiques	160
III.7.3 Résolution numérique par FDTD	161
III.7.3.1 Principe de la méthode utilisée	161
III.7.3.2 Conditions de simulation	163
III.7.3.3 Résultats et comparaison avec les expériences	164
III.7.3.3.1 Étude dynamique	165
III.7.3.3.2 Étude modale	165
III.8 Conclusion et perspectives	169
IV Diffusion multiple en milieu désordonné	171
IV.1 Introduction et motivations	172
IV.2 Généralités sur la diffusion multiple en milieux désordonnés	175
IV.2.1 Longueurs caractéristiques du problème	175
IV.2.2 Les différents régimes de propagation en milieu diffuseur . . .	176

IV.3	Élaboration du système désordonné	177
IV.4	Étude expérimentale	182
IV.4.1	Conditions de l'expérience	182
IV.4.2	Résultats préliminaires	185
IV.4.3	Étude dynamique	189
IV.4.4	Étude modale	191
IV.5	Conclusion et perspectives	198
Conclusion générale		201
A	Tenseur des contraintes et notation de Voigt	205
A.1	Tenseur des contraintes	205
A.2	Notation de Voigt	206
B	Code Matlab pour les courbes de dispersions	207
C	Courant délivré par la sonde interférométrique	211
D	Modèle de diffusion de Poisson-Kirchhoff	213
D.1	Expression des grandeurs	213
D.1.1	Déplacements et déformations	213
D.1.2	Contraintes	215
D.2	Éléments de matrice	218
E	Élaboration des échantillons de silicium	221
E.1	Gravure profonde du silicium	221
E.2	Résultats et imperfections	223
Bibliographie		227

Introduction générale

Qu'elles soient lumineuses, électromagnétiques, acoustiques ou élastiques, les ondes occupent une place considérable dans notre quotidien. Elles constituent un moyen privilégié dont nous disposons pour appréhender notre environnement et communiquer entre nous. Les milieux dans lesquels elles se propagent sont le plus souvent diffusants : les ondes hertziennes sont diffusées par les immeubles des villes, la lumière du soleil par le brouillard et les nuages, les vagues par les coques des bateaux, le son par les parois d'une salle de concert, etc. Le rôle des interférences dans ces milieux est crucial. Pour des milieux hétérogènes dont le désordre est suffisamment fort, les interférences entre les ondes multiplement diffusées peuvent bloquer la propagation des ondes : ce phénomène spectaculaire, connu sous le nom de "localisation d'Anderson" (ou localisation forte), a été proposé à la fin des années 1950 pour les ondes électroniques. Étant de nature purement ondulatoire, le phénomène a été naturellement étendu aux ondes classiques.

Parmi elles, les ondes élastiques présentent de nombreux avantages pour l'étude expérimentale de la propagation en milieux complexes : leur grande longueur d'onde (de quelques dixièmes de millimètres à quelques centimètres, voire de l'ordre du kilomètre pour les ondes sismiques) ainsi que leur vitesse de propagation relativement faible permettent d'effectuer des mesures résolues en temps et en espace sur des systèmes de taille macroscopique. Les dispositifs expérimentaux ne requièrent donc pas d'électronique ultra-rapide et peuvent être en outre étudiés à température ambiante. Ces attributs font des ondes élastiques un outil performant dont peut bénéficier l'étude de la propagation des ondes en milieux complexes.

Outre les milieux désordonnés, les milieux homogènes chaotiques présentent une complexité qui émane de leur géométrie singulière. Contrairement aux systèmes dits réguliers (rectangle, ellipse, cercle), il n'existe pas de solution analytique aux équations du mouvement dans un milieu chaotique. La dynamique de ces systèmes non intégrables est caractérisée par la fameuse propriété d'extrême sensibilité aux conditions initiales.

C'est dans ce contexte que s'inscrit ce travail de thèse. Le but est de développer une expérience modèle permettant d'étudier les problématiques fondamentales que sont la propagation et la diffusion^c des ondes élastiques en milieux complexes. Plus précisément, nous souhaitons déterminer la nature des modes dans un milieu fortement désordonné contenant un grand nombre de diffuseurs résonants. Pour pouvoir atteindre un régime extrême de localisation forte, les diffuseurs doivent présenter une efficacité maximale. Il est alors nécessaire de connaître préalablement le comportement d'une onde de plaque en présence d'un diffuseur, afin d'optimiser le pouvoir diffusant de ce dernier.

En parallèle, nous portons un intérêt particulier à l'effet de l'ouverture d'un milieu homogène chaotique vers l'extérieur. Cette configuration correspond au cas des milieux réels qui ne sont en pratique jamais fermés, ne serait-ce que pour mesurer les propriétés de ces derniers. Il apparaît alors essentiel de connaître les effets d'un couplage du système sur les propriétés spectrales et spatiales des modes. En plus de l'aspect très fondamental de ces problématiques, des applications dérivant de cette étude expérimentale sont envisageables. Elles se situent dans le domaine de l'imagerie acoustique, de la détection de défauts en milieux acoustiquement opaques ou encore des problèmes inverses.

Le présent manuscrit est constitué de quatre chapitres. Le premier d'entre eux posera les bases des ondes élastiques qui se propagent dans les milieux que nous avons choisi d'étudier : les plaques minces. Les ondes qui se propagent dans de tels systèmes sont de deux types : les ondes de Lamb, polarisées dans le plan sagittal, et les ondes de cisaillement polarisées dans le plan horizontal notées (SH). Les ondes

c. on parle ici de diffusion au sens de "scattering" en anglais. Ce sera le cas dans la quasi-totalité de ce manuscrit.

de Lamb induisent deux types de déformations : les modes symétriques (S) et les modes antisymétriques (A). Elles possèdent l'atout de se propager sur de longues distances avec peu de déperdition d'énergie, justifiant leur usage intensif dans le domaine du contrôle et de l'évaluation non destructifs. Elles impliquent néanmoins un lot de complications liées à leur nature vectorielle, leur caractère dispersif et leur propagation multimodale. La deuxième moitié de ce chapitre présentera l'expérience d'élastodynamique que j'ai développée au Laboratoire Physique de la Matière Condensée (LPMC) à Nice dans l'équipe Propagation en Milieux Complexes. J'y détaillerai les outils qui permettront tout au long de ce manuscrit d'étudier différentes plaques de silicium "complexes".

Dans le chapitre II, on considérera un milieu chaotique et l'on étudiera l'effet de pertes locales sur les caractéristiques spectrales des modes^d mais également sur les caractéristiques spatiales des déformées modales. Plus précisément, on s'intéressera expérimentalement au comportement des ondes de Lamb dans une plaque de silicium dont le taux de pertes locales est contrôlé. Ces résultats seront comparés aux calculs analytiques développés par les théoriciens de l'équipe.

Le chapitre III traitera du problème complexe de la diffusion des ondes de plaque par un trou non traversant ou trou "borgne". On présentera les motivations qui nous ont poussés à choisir ce type de diffuseur résonant. On fera également un tour d'horizon des différentes théories et approches existantes pour décrire la diffusion d'une onde de flexion dans une plaque infinie avant d'adapter l'une d'entre elles, la méthode de Poisson-Kirchhoff, à notre cas. La deuxième partie du chapitre sera consacrée à l'étude expérimentale de la diffusion d'une onde de flexion dans une plaque de silicium contenant un trou borgne. La confrontation des résultats expérimentaux à une méthode numérique de type FDTD^e permettra de mieux comprendre les phénomènes de couplage entre les résonances du diffuseur et celles de la plaque environnante.

d. que l'on appelle "quasimodes" du fait de l'ouverture du système vers l'extérieur

e. Finite Difference Time Domain

Le dernier chapitre traitera de la propagation des ondes de Lamb dans une plaque de silicium contenant une forte concentration de trous borgnes répartis aléatoirement. Après quelques brefs rappels sur la propagation en milieu désordonné, on présentera les estimations que l'on a effectuées à partir du modèle théorique de Poisson-Kirchhoff du chapitre III pour pouvoir élaborer un échantillon "localisant" au sens d'Anderson. La dernière partie du chapitre sera consacrée à l'étude expérimentale d'un échantillon fabriqué par les membres du Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS) à Toulouse, réalisé à partir de nos estimations. Les résultats permettront de mettre en exergue les transitions entre régime diffusif et régime proche d'un état de localisation dans le domaine temporel et dans le domaine spectral. Nous verrons en particulier que, malgré l'absence de signature de la localisation dans le spectre, certaines distributions spatiales présentent un confinement spatial et un profil de décroissance exponentiel, signature de modes localisés au sens d'Anderson.

Chapitre I

Ondes élastiques de surface : réalisation expérimentale

Sommaire

I.1	Introduction et motivations	25
I.2	Ondes élastiques dans les plaques minces	26
I.2.1	Rappels d'élasticité tridimensionnelle	26
I.2.2	Ondes acoustiques de surface	31
I.2.2.1	Ondes non dispersives	32
I.2.2.2	Ondes dispersives	33
I.2.3	Ondes de plaque	34
I.2.3.1	Ondes de Lamb	34
I.2.3.1.1	Equation de Rayleigh-Lamb	34
I.2.3.1.2	Courbes de dispersion	37
I.2.3.1.3	Cas basse fréquence	43
I.2.3.2	Ondes transversales horizontales (SH)	45
I.2.4	Propagation dans les cristaux à symétrie cubique, cas particulier du silicium	46
I.3	Génération et détection optiques des ultrasons	52
I.3.1	Génération d'ultrasons par laser	52
I.3.1.1	Régime thermoélastique	53

24 Chapitre I. Ondes élastiques de surface : réalisation expérimentale

I.3.1.2	Régime d'ablation	56
I.3.2	Détection sans contact	59
I.4	Dispositif expérimental	63
I.4.1	Présentation	63
I.4.1.1	Types d'échantillon et matériau	63
I.4.1.2	Dispositifs de génération des ultrasons	65
I.4.1.2.1	Excitation optique par laser impulsionnel	65
I.4.1.2.2	Excitation par transducteur de contact	69
I.4.1.3	La sonde laser interférométrique hétérodyne . .	70
I.4.1.4	Acquisition et traitement des données	74
I.4.1.5	Contrôle des pertes	76
I.4.1.5.1	Contrôle global du couplage avec l'air .	77
I.4.1.5.2	Contrôle local	79
I.4.2	Exemple de mesure : courbes de dispersion expérimentales	80
I.5	Conclusion	83

I.1 Introduction et motivations

Décrites en 1917 par le mathématicien anglais Horace Lamb [1], les ondes élastiques qui se propagent dans les plaques minces^a possèdent l'avantage de parcourir de longues distances avec très peu de dissipation. Leur faible vitesse de propagation (comparativement aux ondes électromagnétiques par exemple) ainsi que l'échelle caractéristique des longueurs d'onde (de quelques dixièmes de millimètres à quelques centimètres) permettent de constituer des dispositifs expérimentaux de taille raisonnable et ne nécessitant pas d'électronique ultra-rapide. Les nombreuses études motivées par les applications dans le domaine du contrôle non destructif de matériaux ont permis l'élaboration de méthodes large bande propices à l'imagerie, notamment grâce au développement ces cinquante dernières années de méthodes de génération et détection des ultrasons par laser.

Rappelons que l'objectif de cette thèse est d'étudier expérimentalement les phénomènes complexes de diffusion multiple, que ce soit en milieux hétérogènes ou en milieux homogènes chaotiques. Pour cela, il est nécessaire de développer une expérience modèle permettant de récolter et d'étudier toute la dynamique du système tout en présentant le moins de contraintes expérimentales possibles. De ce point de vue et compte tenu de leurs atouts, les ondes de Lamb constituent un candidat idéal pour l'étude expérimentale de la propagation et de la diffusion des ondes en milieux complexes.

Néanmoins, ces ondes vectorielles impliquent des difficultés liées à une propagation multimodale et à leur caractère dispersif. A cette dispersion fréquentielle s'ajoute une dispersion spatiale due à l'anisotropie des échantillons de silicium que nous avons choisi d'étudier.

La première partie de ce chapitre posera les bases théoriques des ondes guidées dans une plaque mince. Ces dernières résultent de l'interaction d'ondes de volume de différentes polarisations sur les surfaces libres du système. Je ferai au préalable un rappel sur les équations de l'élasticité tridimensionnelle avant d'aborder la notion

a. les plaques minces sont usuellement caractérisées par un rapport $L/2h$ (où L est la plus petite dimension latérale et $2h$ l'épaisseur) compris entre 8 et 80 [2]

d'ondes de surface. Je présenterai ensuite quelques généralités sur la propagation en milieu anisotrope et en particulier dans la famille des cristaux à symétrie cubique à laquelle appartient le silicium.

La deuxième moitié du chapitre sera consacrée à la présentation du dispositif expérimental mis en œuvre dans le cadre de cette thèse et à la description des outils utilisés qui nous permettront d'étudier diverses catégories de milieux complexes. Ces derniers feront l'objet des chapitres suivants.

Notons que tout au long de ce manuscrit, nous ne considérerons pas la limite quantique de l'élasticité, c'est-à-dire l'existence de quantum d'énergie de vibration ou phonon. Cette hypothèse se justifie par le fait que nos valeurs typiques de longueurs d'onde sont grandes devant les distances nanométriques qui séparent les atomes d'un monocristal de silicium. De plus, les modèles théoriques ne prendront pas en compte les différentes sources de dissipation (couplage avec l'air, pertes internes intrinsèques au matériau, couplage externe, etc.) sur certaines desquelles on peut jouer expérimentalement.

I.2 Ondes élastiques dans les plaques minces

I.2.1 Rappels d'élasticité tridimensionnelle

Pour un solide homogène isotrope, les trois relations fondamentales de l'élasticité linéaire sont les suivantes^b :

- l'équation du mouvement, qui résulte du principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (\text{I.1})$$

où σ_{ij} désigne les composantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, f_i les composantes des forces volumiques, ρ la masse volumique du matériau et u_i les composantes du champ de déplacement \mathbf{u} .

- la loi de Hooke généralisée (ou relation constitutive contrainte/déformation) :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (\text{I.2})$$

b. on utilise la convention de sommation d'Einstein

où les C_{ijkl} sont les composantes du tenseur des rigidités (ou d'élasticité) \mathbf{C} . On en compte $3^4 = 81$ mais celles-ci ne sont pas indépendantes.

Leur nombre peut en effet être réduit en considérant d'une part les symétries des tenseurs et d'autre part les symétries du réseau cristallin considéré. En utilisant la notation de Voigt (voir annexe A) le tenseur \mathbf{C} possèdera au maximum 21 constantes élastiques indépendantes dans les cas les plus complexes d'anisotropie (i.e le système triclinique, qui n'admet qu'un centre de symétrie) [3].

Dans le cas d'un matériau isotrope, le nombre de composantes indépendantes est réduit à deux. Ainsi, le comportement élastique du solide peut être décrit soit par les constantes élastiques C_{11} et C_{12} , soit par les coefficients de Lamé λ et μ (μ porte également le nom de module de cisaillement et se trouve parfois noté par la lettre G) ou encore le couple (E, ν) où ν est le coefficient de Poisson et E le module d'Young (appelé aussi module d'élasticité longitudinale). On rappelle que le coefficient de Poisson caractérise la contraction de la matière perpendiculairement à la direction de l'effort appliqué. Le module d'Young, indice de rigidité du matériau, caractérise quant à lui le rapport de la contrainte de traction ou de compression appliquée sur la déformation résultante. Les constantes élastiques décrites précédemment sont liées par de simples relations résumées dans le tableau (I.1). Dans ce cas simple d'isotropie, la loi de Hooke se réduit à :

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (\text{I.3})$$

où les ϵ_{ij} sont les composantes du tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}$, ϵ_{kk} la trace de $\boldsymbol{\epsilon}$ et δ_{ij} le symbole de Kronecker (qui vaut 1 pour $i = j$, 0 sinon).

– la relation de Cauchy (ou relation déplacement/déformation) :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I.4})$$

La combinaison de ces trois dernières relations aboutit à la formulation en déplacement de Navier [4] :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (\text{I.5})$$

28 Chapitre I. Ondes élastiques de surface : réalisation expérimentale

TABLEAU I.1 – Relations entre les différentes constantes élastiques d'un solide isotrope.

	(λ, μ)	(E, ν)	(C_{11}, C_{12})
E	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \nu}$	E	$C_{11} - 2\frac{C_{12}^2}{C_{11} + C_{12}}$
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	ν	$\frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}}$
λ	λ	$\frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	C_{12}
μ	μ	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$	$\frac{C_{11} - C_{12}}{2}$

En l'absence de force volumique \mathbf{f} , l'équation de Navier peut se mettre sous la forme vectorielle suivante :

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (\text{I.6})$$

où Δ désigne l'opérateur laplacien qui, en coordonnées cartésiennes, s'exprime comme suit :

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{I.7})$$

Dans l'équation (I.6), les trois composantes du déplacement u_x, u_y, u_z sont couplées. Il est possible d'obtenir des équations découplées en adoptant la décomposition de Helmholtz. Cette dernière nous permet d'écrire le champ de déplacement \mathbf{u} comme la somme d'un potentiel scalaire irrotationnel ϕ et d'un potentiel vectoriel incompressible $\boldsymbol{\psi}$:

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi} \quad (\text{I.8})$$

avec

$$\nabla \wedge (\nabla\phi) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \nabla\boldsymbol{\psi} = 0 \quad (\text{I.9})$$

Ainsi, on a explicitement :

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \quad (\text{I.10})$$

$$u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \quad (\text{I.11})$$

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \quad (\text{I.12})$$

En reportant l'expression du déplacement (I.8) dans l'équation de Navier (I.6) on obtient :

$$\nabla[(\lambda + 2\mu)\Delta\phi - \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}] + \nabla \wedge [\mu\Delta\boldsymbol{\psi} - \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}] = 0 \quad (\text{I.13})$$

Ainsi on aboutit à deux équations de d'Alembert découplées pour les deux potentiels ϕ et $\boldsymbol{\psi}$:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\boldsymbol{\psi} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.14})$$

La première équation correspond à la propagation d'une onde **longitudinale** (L) ou de compression (P) pour laquelle la matière subit une succession de compressions et de dilatations parallèles à la direction de propagation. Une illustration de ce type de mouvement est présentée dans la figure I.1.

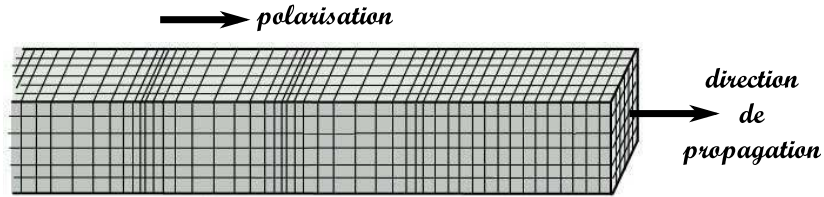


FIGURE I.1 – Onde longitudinale : déformation parallèle à la direction de propagation.

30 Chapitre I. Ondes élastiques de surface : réalisation expérimentale

La célérité de l'onde longitudinale est définie par la relation suivante :

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (\text{I.15})$$

qui, en fonction du coefficient de Poisson ν et du module d'Young E s'écrit

$$c_L = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho(\nu + 1)(1 - 2\nu)}} \quad (\text{I.16})$$

La deuxième équation concerne les ondes **transversales** (T) ou de cisaillement (S) (pour Shear en anglais) pour lesquelles le déplacement des particules s'effectue perpendiculairement à la direction de propagation (figure I.2). On distingue les ondes transversales polarisées dans le plan vertical du solide (ondes TV ou SV) et dans le plan horizontal (ondes TH ou SH).

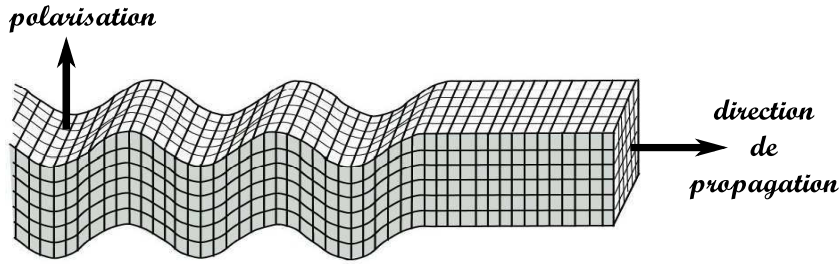


FIGURE I.2 – Onde transversale : déformation perpendiculaire à la direction de propagation.

La vitesse de ces ondes est définie comme suit :

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(\nu + 1)}} \quad (\text{I.17})$$

Généralement, on a $c_L \approx 2c_T$.

Dès lors que le solide possède une interface, les différentes ondes de volume vont y interagir. Cette interaction ne concerne pas les ondes transversales horizontales (SH) dont la polarisation n'est pas modifiée lors d'une réflexion sur l'interface [5]. En revanche, les ondes longitudinales (L) et transversales verticales (TV) vont subir à chaque réflexion une conversion partielle selon le processus suivant :

$$\begin{aligned} \text{onde (L) incidente} &\rightarrow \text{onde (L) réfléchie} + \text{onde (TV) convertie} \\ \text{onde (TV) incidente} &\rightarrow \text{onde (TV) réfléchie} + \text{onde (L) convertie} \end{aligned}$$

Ces phénomènes de conversion vont donner lieu à de nouveaux types d'ondes qui vont dépendre de la nature de l'interface et des milieux de propagation. Ces dernières appartiennent à la vaste famille des ondes acoustiques de surface (OAS, également désignées par leur acronyme anglais SAWs).

I.2.2 Ondes acoustiques de surface

Alors que les ondes de volume s'étendent dans tout le milieu où elles se propagent, les ondes acoustiques de surface sont guidées par l'interface et y restent confinées sur une épaisseur d'environ une longueur d'onde. De nombreux ouvrages [6–8] présentent de manière exhaustive les différents types d'OAS en milieux isotropes, anisotropes [9] ou même piézoélectrique [5]. Ceci sortant du cadre de cette thèse, je me contenterai de citer les différentes catégories rencontrées en milieu isotrope ainsi que leurs principales caractéristiques. En revanche la configuration qui nous intéresse, à savoir la propagation dans une plaque mince sera détaillée dans les sections suivantes.

On distingue deux grandes catégories d'OAS : les ondes non dispersives dont les différentes composantes fréquentielles se propagent à la même vitesse, et le cas contraire des ondes dispersives pour lesquelles la vitesse de phase dépend de la fréquence.

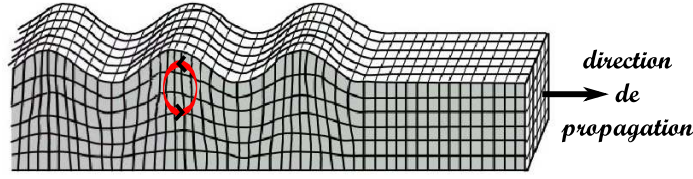


FIGURE I.3 – Onde de Rayleigh : la polarisation est elliptique et rétrograde près de la surface.

I.2.2.1 Ondes non dispersives

- les ondes de **Rayleigh** se propagent à l'interface solide isotrope/vide. Le mouvement des particules est elliptique, tout comme celui des ondes de gravité que l'on rencontre à la surface de l'eau à la différence que le sens de rotation est rétrograde près de la surface pour les ondes de Rayleigh. La polarisation elliptique peut s'expliquer par la faible impédance de l'air par rapport à celle du solide, favorisant ainsi le déplacement normal par rapport au déplacement tangentiel. L'amplitude des ondes de Rayleigh décroît exponentiellement avec l'épaisseur de sorte que leur énergie reste confinée sur à peu près une longueur d'onde. La vitesse de ces ondes (toujours inférieure à celle des ondes de volume) peut être estimée à partir de la formule suivante :

$$C_R \approx C_T \left(\frac{0.44 + \frac{C_{12}}{C_{11}}}{0.58 + \frac{C_{12}}{C_{11}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.18})$$

qui peut aussi s'écrire :

$$C_R \approx C_T \left(\frac{1.44\lambda + 0.88\mu}{1.58\lambda + 1.16\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.19})$$

Cette expression, proposée par Royer et Clorennec [10], est une amélioration de la formule initialement proposée par Viktorov [11].

Dans le cas du silicium, la vitesse des ondes de Rayleigh vaut approximativement 4321 m/s.

- les ondes de **Stoneley** se retrouvent à l'interface entre deux solides et correspondent à la combinaison de deux ondes de Rayleigh qui se propagent de part et d'autre de la frontière. La vitesse de ces ondes est comprise entre la plus petite vitesse des ondes de Rayleigh parmi les deux solides pris séparément et la plus petite vitesse des ondes de volume.
- les ondes de **Scholte** se propagent à l'interface solide isotrope/fluide. On peut les voir comme un cas limite des ondes de Stoneley où le module de cisaillement μ d'un des deux milieux tend vers zéro.

I.2.2.2 Ondes dispersives

Dès lors qu'une échelle de longueur caractéristique est introduite (épaisseur d'une plaque mince ou milieu multicouche), la propagation des ondes devient dispersive.

- les ondes qui se propagent dans une plaque mince isotrope se découpent en deux catégories indépendantes : les ondes de **Lamb** et les ondes **SH**. Leurs principales caractéristiques sont une propagation guidée multimodale entraînant deux grandes catégories de déformations : les déformations symétriques (mouvement de compression sans flexion du plan moyen) et les déformations antisymétriques (flexion sans compression du plan moyen). Elles feront l'objet des sections suivantes.
- la propagation dans une couche et un substrat isotropes de l'onde transversale horizontale SH donne naissance aux ondes guidées de **Love** (à condition que la vitesse de cisaillement dans la couche soit inférieure à celle dans le substrat). La vitesse de ces ondes oscille continuellement entre les vitesses de cisaillement des deux milieux.
- pour les ondes polarisées dans le plan sagittal, si la vitesse de Rayleigh dans la couche est inférieure à celle dans le substrat, des modes d'ordres supérieurs peuvent apparaître pour lesquels le déplacement mécanique oscille en profondeur dans la couche et décroît dans le substrat. Ces modes se divisent eux aussi en deux familles de déformation symétrique et antisymétrique. Le mode symétrique de plus bas ordre est appelé onde de **Rayleigh perturbée** alors que le pendant antisymétrique porte le nom d'onde de **Sezawa** [6].

I.2.3 Ondes de plaque

I.2.3.1 Ondes de Lamb

Considérons une plaque homogène isotrope d'épaisseur constante $2h$, de dimensions latérales infinies (cf. figure I.4) et placée dans le vide. Le système de coordonnées est tel que le plan (x, y) correspond au feuillet moyen de la plaque dont la normale est suivant z . La propagation se fait suivant l'axe x .

Dans le cas où l'épaisseur est plus grande que la longueur d'onde λ , deux ondes de Rayleigh vont se propager indépendamment sur les deux surfaces libre du solide. Mais si l'épaisseur de la plaque est inférieure ou égale aux longueurs d'ondes des ondes de volume, les deux ondes de Rayleigh vont se coupler et donner naissance aux ondes de Lamb qui vont mettre en mouvement la totalité de la plaque.

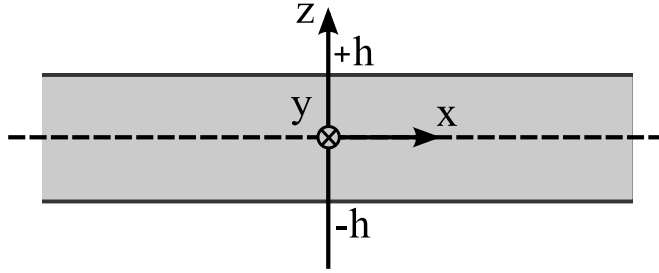


FIGURE I.4 – Plaque homogène d'épaisseur $2h$ et de dimensions latérales infinies.

I.2.3.1.1 Equation de Rayleigh-Lamb

On adopte la méthode des potentiels [5] dont les fondements reposent sur la décomposition de Helmholtz introduite en (I.8). Les ondes de Lamb, polarisées dans le plan sagittal (x, z) de la plaque, sont découplées des ondes transversales horizontales (SH) dont le mouvement s'effectue suivant y . L'hypothèse de déformation plane dans le plan (x, z) implique $u_y = 0$ et $\partial/\partial y = 0$.

Les composantes des déplacements des ondes de Lamb se propageant suivant x s'expriment alors comme suit :

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \quad (\text{I.20})$$

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \quad (\text{I.21})$$

où les potentiels ϕ et ψ_y (qu'on notera ψ) obéissent aux équations de propagation suivantes :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.22})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.23})$$

On cherche les solutions harmoniques de la forme :

$$\phi = \Phi(z)e^{i(kx - \omega t)}, \quad \psi = \Psi(z)e^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{I.24})$$

En injectant ces solutions dans les équations (I.22) et (I.23), on obtient les équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + p^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + q^2 \Psi = 0 \quad (\text{I.25})$$

avec

$$p^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2, \quad q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \quad (\text{I.26})$$

Les solutions de (I.25) sont déterminées par les conditions aux limites de la plaque pour laquelle les contraintes normale σ_{zz} ^c et tangentielle σ_{xz} doivent s'annuler en $z = \pm h$. Les expressions des contraintes pour un solide isotrope se déduisent de (I.3) :

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (\text{I.27})$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (\text{I.28})$$

qui en terme de potentiels Φ et Ψ et après simplifications donnent :

$$\sigma_{zz} = \mu \left[(k^2 - q^2) \Phi + 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] \quad (\text{I.29})$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left[(q^2 - k^2) \Psi + 2ik \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] \quad (\text{I.30})$$

c. la notation des contraintes et leur signification physique est rappelée dans l'annexe A

L'annulation des contraintes en $z = \pm h$ n'est possible que si elles sont fonctions paires ou impaires de z . Compte tenu de leur expression, et sachant que la dérivation change la parité d'une fonction, les potentiels solutions de (I.25) sont forcément de parités différentes et de la forme suivante :

$$\Phi(z) = A \cos(pz + \alpha) \quad (\text{I.31})$$

$$\Psi(z) = B \sin(qz + \alpha) \quad (\text{I.32})$$

avec $\alpha = 0$ (cas σ_{zz} pair, σ_{xz} impair) ou $\alpha = \pi/2$ (cas σ_{zz} impair, σ_{xz} pair). On en déduit les expressions des composantes du champ de déplacement \mathbf{u} :

$$u_x = [ikA \cos(pz + \alpha) - qB \cos(qz + \alpha)]e^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{I.33})$$

$$u_z = [-Ap \sin(pz + \alpha) + ikB \sin(qz + \alpha)]e^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{I.34})$$

Les deux valeurs du paramètre α correspondent alors à deux familles distinctes d'ondes de Lamb :

- les modes **symétriques** correspondant à la valeur $\alpha = 0$ et pour lesquels les composantes longitudinales du déplacement u_x sont égales de part et d'autre du feuillet moyen de la plaque, alors que les composantes transversales u_z sont opposées (cf. figure I.5).

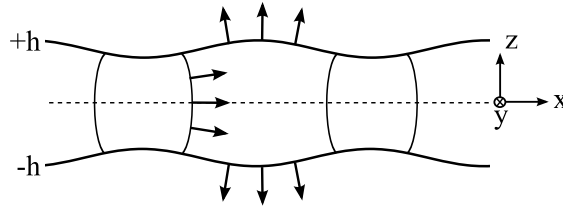


FIGURE I.5 – Onde de Lamb symétrique.

- les modes **antisymétriques** correspondant à $\alpha = \pi/2$ et pour lesquels les composantes transversales sont égales de part et d'autre du feuillet moyen de la plaque et les composantes longitudinales opposées (cf. figure I.6).

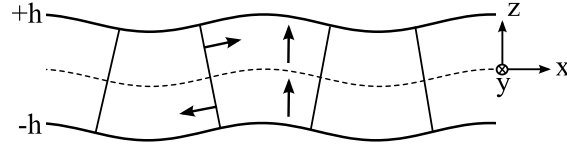


FIGURE I.6 – Onde de Lamb antisymétrique.

Les conditions aux limites d'annulation des contraintes en $z = \pm h$ (pour $\alpha = 0$ ou $\pi/2$) mènent au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} (k^2 - q^2)A \cos(ph + \alpha) + 2ikqB \cos(qh + \alpha) &= 0 \\ (q^2 - k^2)B \sin(qh + \alpha) - 2ikpA \sin(ph + \alpha) &= 0 \end{cases} \quad (\text{I.35})$$

L'homogénéité de ce système d'équations implique l'annulation du déterminant des coefficients A et B , soit :

$$-(k^2 - q^2) \cos(ph + \alpha) \sin(qh + \alpha) - 4k^2qp \cos(qh + \alpha) \sin(ph + \alpha) = 0 \quad (\text{I.36})$$

qui, après simplifications, peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\omega^4}{c_T^4} = 4k^2q^2 \left[1 - \frac{p \tan(ph + \alpha)}{q \tan(qh + \alpha)} \right] \quad (\text{I.37})$$

Cette relation de dispersion constitue l'équation de **Rayleigh-Lamb**. Elle mène à une infinité de solutions qui correspondent à l'infinité de modes de Lamb symétriques (S) et antisymétriques (A). Les modes (S) s'apparentent aux ondes de compression dans la mesure où le déplacement moyen sur l'épaisseur se fait essentiellement dans la direction longitudinale. Les modes (A) sont quant à eux appelés modes de flexion puisque le déplacement moyen se fait dans la direction transverse.

I.2.3.1.2 Courbes de dispersion

L'équation de Rayleigh-Lamb étant insoluble analytiquement, il faut recourir à des méthodes numériques pour trouver les couples (ω, k) de chaque mode. L'une d'entre elles [4] permet d'accéder rapidement aux courbes de dispersion des différents modes. Elle est basée sur la recherche des racines des relations symétrique et

38 Chapitre I. Ondes élastiques de surface : réalisation expérimentale

antisymétrique adimensionnées de l'équation de Rayleigh-Lamb :

$$(\xi^2 - x^2)^2 \sin x \cos y + 4xy\xi^2 \cos x \sin y = 0, \quad \text{pour les modes (S)} \quad (\text{I.38})$$

$$(\xi^2 - x^2)^2 \sin y \cos x + 4xy\xi^2 \cos x \sin y = 0, \quad \text{pour les modes (A)} \quad (\text{I.39})$$

où

$$x = (\Omega^2 - \xi^2)^{1/2}, \quad y = (\Omega^2 \frac{c_T^2}{c_L^2} - \xi^2)^{1/2}, \quad \Omega = \frac{\omega h}{c_T}, \quad \xi = kh \quad (\text{I.40})$$

La recherche des racines des équations (I.38) et (I.39) est effectuée numériquement par la routine 'fzero' du logiciel Matlab (cf. programme dans l'annexe B). Le résultat se présente sous la forme d'un réseau de courbes où chaque branche correspond à un mode de Lamb propagatif. La figure (I.7) montre les courbes de dispersion des huit premiers modes de Lamb calculés pour une plaque isotrope d'aluminium d'épaisseur $2h$, de coefficient de Poisson $\nu = 0.34$ et dans laquelle la vitesse des ondes transversales vaut $c_T = 3140$ m/s.

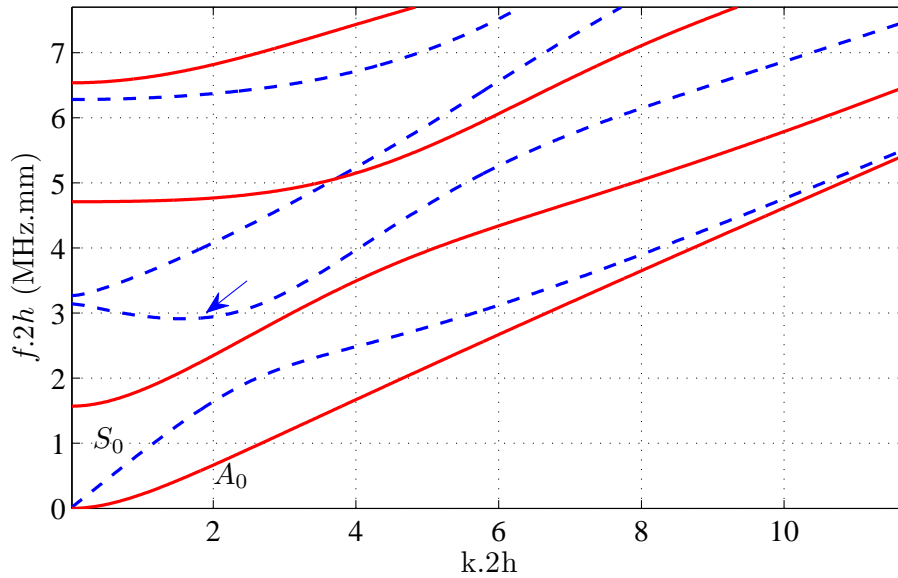


FIGURE I.7 – Les huit premiers modes de Lamb symétriques (ligne en pointillé) et antisymétriques (trait plein) pour une plaque d'aluminium homogène d'épaisseur $2h$. La flèche bleue indique le point particulier où la vitesse de groupe du mode S_1 s'annule (ZGV).

Pour des raisons pratiques, on regarde l'évolution du produit {fréquence \times épaisseur} en fonction du produit {nombre d'onde \times épaisseur}. Cette représentation courante permet de trouver rapidement les couples (f, k) pour toute épaisseur de plaque $2h$ sans recalculer les courbes de dispersion.

Notons que nous ne considérons ici que les racines réelles des relations de dispersion qui correspondent aux modes propagatifs de Lamb. Les modes non propagatifs (nombre d'onde imaginaire pur) ou atténués (nombre d'onde complexe) ne sont pas pris en compte. Le lecteur désireux d'en connaître d'avantage sur ces solutions en champ proche pourra par exemple consulter la référence [12].

Physiquement, l'évolution de ces courbes traduit la variation de la proportion des composantes longitudinales et des composantes transversales en fonction de la fréquence. Il existe deux modes, les modes de Lamb fondamentaux antisymétrique A_0 et symétrique S_0 , qui se propagent dans la plaque quelque soit la fréquence. Les modes d'ordre supérieur, notés A_n et S_n , possèdent quant à eux une fréquence de coupure au delà de laquelle ils peuvent se propager. L'ordre du mode n ($n \in \mathbb{N}^*$) indique le nombre de nœuds du champ de déplacement mécanique le long de l'épaisseur de la plaque lorsque le mode vibre à une fréquence proche de sa fréquence de coupure. Les relations permettant de trouver les fréquences de coupure des modes de Lamb d'ordre supérieur s'obtiennent en considérant le cas $k \mapsto 0$ (qui implique $\omega \mapsto \omega_c$) dans l'équation de Rayleigh-Lamb. Elles sont indiquées dans le tableau (I.2).

Les fréquences de coupure approximatives des 2 premiers modes d'ordre supérieur pour une plaque de silicium de $410 \mu\text{m}$ d'épaisseur coupée dans le plan cristallin^d (100), semblable à celles que nous utilisons dans nos expériences, sont les suivantes : $f_{A_1} \sim 7 \text{ MHz}$ et $f_{S_1} \sim 10 \text{ MHz}$. Bien que les théories précédentes concernent les milieux isotropes, il semble raisonnable de considérer que les fréquences de coupure se situent entre les valeurs déduites des vitesses volumiques extrémales dans le plan (100). Il faut garder à l'esprit qu'il ne s'agit ici que d'approximations dont le but est

d. quelques notions de cristallographie dans les milieux à symétrie cubique seront présentées plus loin avec notamment l'expression des vitesses dans les directions cristallines principales

40 Chapitre I. Ondes élastiques de surface : réalisation expérimentale

de montrer que nos conditions expérimentales sont telles qu'aucun mode de Lamb d'ordre supérieur ne se propage. En outre, nous montrerons à la fin de ce chapitre que l'impact de l'anisotropie dans une coupe (100) de silicium est faible sur les courbes de dispersion du mode A_0 .

TABLEAU I.2 – Expressions des fréquences de coupure des modes de Lamb A_n et S_n .

Type de mode	Parité	Fréquence de coupure
modes S	pairs : S_{2n} ($n \in \mathbb{N}^*$)	$f_c = \frac{nc_T}{2h}$
	impairs : S_{2m+1} ($m \in \mathbb{N}$)	$f_c = \frac{(m+1/2)c_L}{2h}$
modes A	pairs : A_{2n} ($n \in \mathbb{N}^*$)	$f_c = \frac{nc_L}{2h}$
	impairs : A_{2m+1} ($m \in \mathbb{N}$)	$f_c = \frac{(m+1/2)c_T}{2h}$

A partir des courbes de dispersion, il est possible d'accéder aux vitesses de phase des modes de Lamb par la relation $V_\phi = \omega/k$. A une fréquence donnée, cette quantité correspond à la vitesse de propagation des fronts d'ondes du mode à l'intérieur d'un paquet d'ondes. La figure (I.8) présente l'évolution des vitesses de phase pour les 8 premiers modes de Lamb d'une plaque d'aluminium. Le comportement asymptotique à haute fréquence de ces courbes montre que la vitesse des deux modes fondamentaux A_0 et S_0 tend vers une limite commune qui est la vitesse des ondes de Rayleigh. On peut également montrer que la vitesse des modes d'ordre supérieur tend vers la vitesse des ondes transversales c_T (en considérant $kh \gg 1$ dans la relation (I.26)).

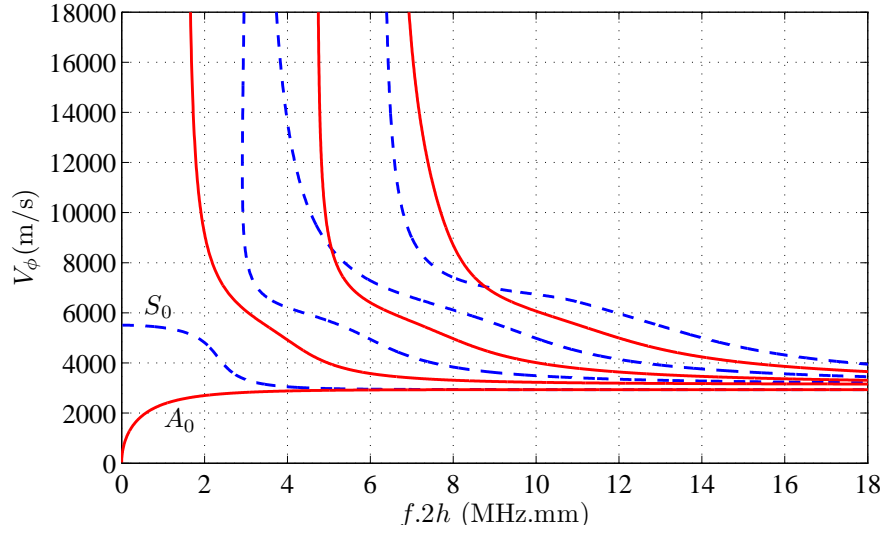


FIGURE I.8 – Evolution de la vitesse de phase V_ϕ des 8 premiers modes de Lamb symétriques (ligne en pointillé) et antisymétriques (trait plein) pour une plaque d'aluminium homogène d'épaisseur $2h$.

Pour un mode propagatif de Lamb, ainsi que pour tout autre type d'ondes dispersives, l'énergie transportée par le mode ne se propage pas à la même vitesse que les fronts d'ondes. Autrement dit la vitesse de groupe $V_g = \partial\omega/\partial k$, qui représente la vitesse de propagation d'un paquet d'ondes de pulsation centrale ω , diffère de la vitesse de phase V_ϕ . L'évolution de la vitesse de groupe des 8 premiers modes de Lamb est présentée dans la figure (I.9).

la figure (I.7) fait apparaître une particularité du premier mode symétrique non fondamental S_1 (point indiqué par une flèche bleue) : ce dernier existe pour une fréquence légèrement inférieure à sa fréquence de coupure. Dans cette zone, la fréquence passe par un minimum pour lequel la vitesse de groupe s'annule. Ce point particulier, que l'on nomme ZGV (pour Zero Group Velocity) [13], correspond à une forte résonance d'épaisseur du mode S_1 . Puisque la vitesse de groupe y est nulle, l'énergie ne se propage pas donc la résonance reste localisée au niveau de la source. Évoquée il y a plus de soixante ans [14], cette particularité des modes de Lamb a été intensivement étudiée durant les années 2000 tant d'un point de vue théorique qu'expérimental avec des applications dans le domaine de l'évaluation non destructive des matériaux [15–22].

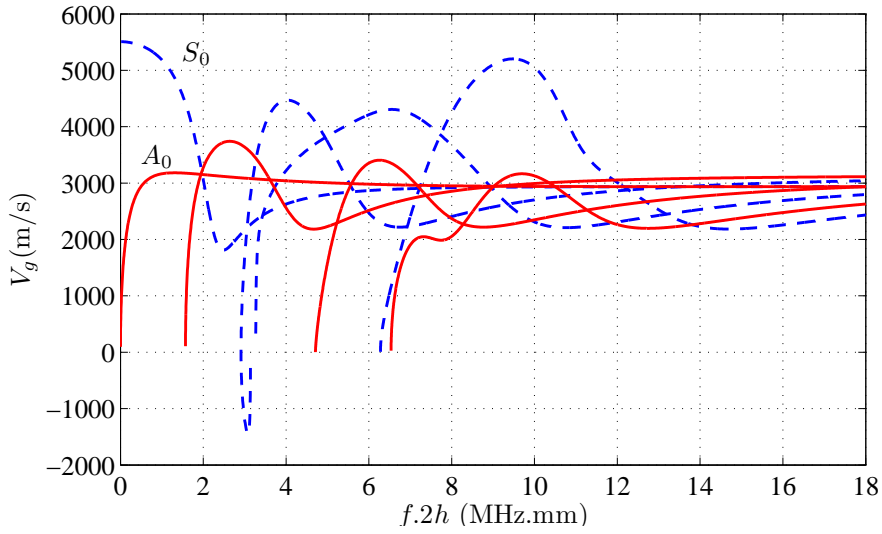


FIGURE I.9 – Evolution de la vitesse de groupe V_g des 8 premiers modes de Lamb symétriques (ligne en pointillé) et antisymétriques (trait plein) pour une plaque de silicium homogène d'épaisseur $2h$.

Une autre zone remarquable de la courbe de dispersion de S_1 se situe juste avant la résonance ZGV et présente une pente négative, soit une vitesse de groupe négative (clairement visible dans la figure I.9). Vitesse de groupe et vitesse de phase sont donc de signes opposés, ce qui implique l'existence d'une onde de Lamb contra-propagative. Très récemment, cette propriété a fait l'objet de la mise en œuvre d'une expérience de réfraction négative pour les ondes de Lamb [23]. Le système étudié est une plaque isotrope avec un changement abrupt d'épaisseur en forme de marche. La conversion entre une onde propagative et contra-propagative au niveau de l'interface (changement d'épaisseur) confère à ce système les propriétés d'une lentille plate pour les ondes élastiques, semblable à la lentille plate pour les ondes électromagnétiques prédite par Veselago à la fin des années 1960 [24]. Horace Lamb ne s'était pas trompé cent ans auparavant en prévoyant d'importantes applications issues de la notion de vitesse de groupe négative [25].

I.2.3.1.3 Cas basse fréquence

Comme nous le verrons plus tard, nos configurations expérimentales sont telles que nous nous situons dans une gamme de produits {fréquence×épaisseur} faible avec comme seuls modes propagatifs les deux modes fondamentaux A_0 et S_0 . Il est alors intéressant d'analyser leurs comportements à basse fréquence, c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde λ est très grande devant l'épaisseur $2h$. Pour ce faire, examinons le comportement asymptotique de l'équation de Rayleigh-Lamb quand $k \mapsto 0$ (impliquant $w \mapsto 0$) :

- pour le mode de Lamb symétrique fondamental \mathbf{S}_0 ($\alpha = 0$), l'équation (I.37) devient :

$$\frac{\omega^4}{c_T^4} \approx 4k^2(q^2 - p^2) = 4k^2\omega^2 \left(\frac{1}{c_T^2} - \frac{1}{c_L^2} \right) \quad (\text{I.41})$$

la vitesse de phase V_ϕ tend alors vers une valeur finie qu'on appelle **vitesse de plaque** et qui est définie par la relation suivante :

$$c_P = 2c_T \left(1 - \frac{c_T^2}{c_L^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.42})$$

On retrouve ce comportement non dispersif dans le domaine basse fréquence du diagramme des vitesses de phase (I.8) de S_0 ainsi que dans la figure (I.7) pour laquelle la relation de dispersion se réduit à :

$$\omega_{S_0} = c_P \cdot k \quad (\text{I.43})$$

Le calcul des composantes du déplacement [5] montre que la composante longitudinale u_x est très grande devant la composante transversale u_z . Ainsi le mode S_0 peut être assimilé à un mode presque purement longitudinal qui se propage à la vitesse c_P (dont la valeur est toujours comprise entre $c_T\sqrt{2}$ et c_L).

- pour le mode de Lamb antisymétrique fondamental \mathbf{A}_0 ($\alpha = \pi/2$), l'équation (I.37) devient, après développement limité des fonctions tangentes :

$$\frac{\omega^4}{c_T^4} \approx 4k^2q^2 \left(1 - \frac{1 - p^2h^2/3}{1 - q^2h^2/3} \right) \approx \frac{4}{3}h^2k^2q^2(p^2 - q^2) \quad (\text{I.44})$$

la vitesse de phase s'exprime alors comme suit :

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{2c_T}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{c_T^2}{c_L^2} kh} = \frac{c_P}{\sqrt{3}} kh \quad (\text{I.45})$$

La relation de dispersion de A_0 à basse fréquence correspond alors à une parabole d'équation :

$$\omega_{A_0} = \frac{c_P}{\sqrt{3}} k^2 h \quad (\text{I.46})$$

La composante transversale u_z du déplacement est très grande devant la composante longitudinale u_x donc le mode A_0 est un mode de flexion à basse fréquence.

La figure I.10 montre les limites de validité des approximations basses fréquences dans le cas d'une propagation d'une onde plane dans la direction $[100]$ de la coupe (100) d'une plaque de silicium de $410 \mu\text{m}$ d'épaisseur. Dans la direction $[100]$, les paramètres élastiques sont les suivants [26] : $E_{[100]} = 130.2 \text{ GPa}$, $\mu_{[100]} = 79.4 \text{ GPa}$ et $\nu_{[100]} = 0.279$.

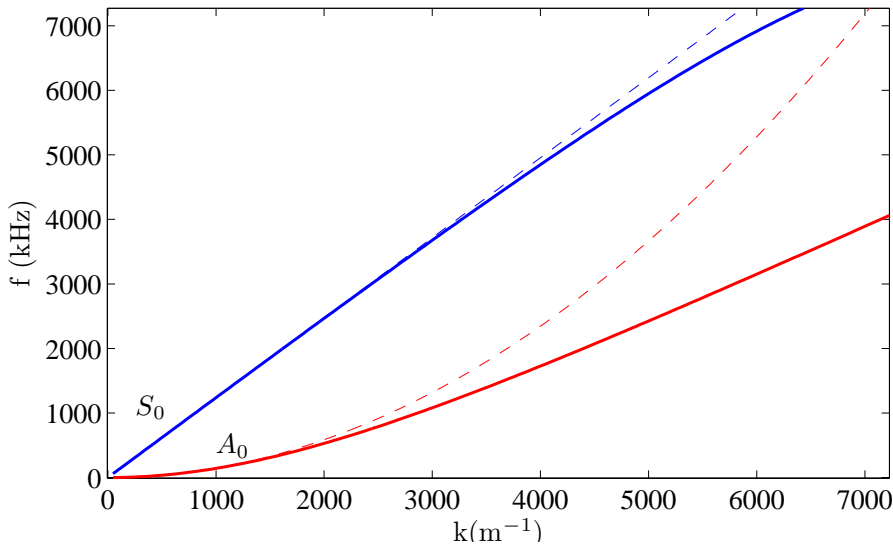


FIGURE I.10 – Comparaison des courbes de dispersion théorique (trait plein) avec les approximations basses fréquences (tirets) pour S_0 et A_0 dans le cas d'une propagation dans la direction $[100]$ de la coupe (100) d'une plaque de silicium de $410 \mu\text{m}$ d'épaisseur.

Les courbes en trait plein sont solutions de l'équation de Rayleigh-Lamb qui correspondent aux modes propagatifs fondamentaux S_0 et A_0 le long de la direction de propagation [100]. Les approximations sont représentées par des courbes en tirets. Dans le cas présent, on observe un écart de 5% entre l'approximation basse fréquence de S_0 et la théorie exacte à partir d'environ 1.4 MHz alors que le cas A_0 est beaucoup plus restrictif dans la mesure où le même écart s'observe à partir de 496 kHz.

I.2.3.2 Ondes transversales horizontales (SH)

Ces ondes se propagent à la vitesse $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$ suivant x et sont polarisées suivant la direction y .

Le déplacement u_y est régi par l'équation de propagation suivante [5] :

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \right) u_y = 0 \quad (\text{I.47})$$

Les solutions u_y se trouvent à partir des conditions aux limites mécaniques qui imposent l'annulation de la contrainte σ_{yz} sur les deux surfaces libres de la plaque en $z = +h$ et $z = -h$. Or cette dernière est reliée à u_y par la relation suivante :

$$\sigma_{yz} = \mu \frac{\partial u_y}{\partial z} \quad (\text{I.48})$$

Annuler cette relation implique un déplacement u_y extrémal. La solution s'écrit donc sous la forme suivante :

$$u_y(z) = u_0 \cos \left[\frac{n\pi}{2h}(z + h) \right] \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \quad (\text{I.49})$$

A chaque valeur de n correspond alors un état de résonance transversale (suivant z). Les n pairs correspondent aux modes SH symétriques tandis que les n impairs concernent les modes SH antisymétriques.

La relation de dispersion $f(k)$ se trouve en injectant les solutions (I.49) dans l'équation (I.47) :

$$f(k) = \frac{c_T}{2\pi} \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{2h} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{I.50})$$

A partir de cette relation on peut tracer les courbes de dispersions des différents modes SH_n . Les six premiers d'entre eux sont représentés dans la figure I.11 dans le cas d'une plaque d'aluminium.

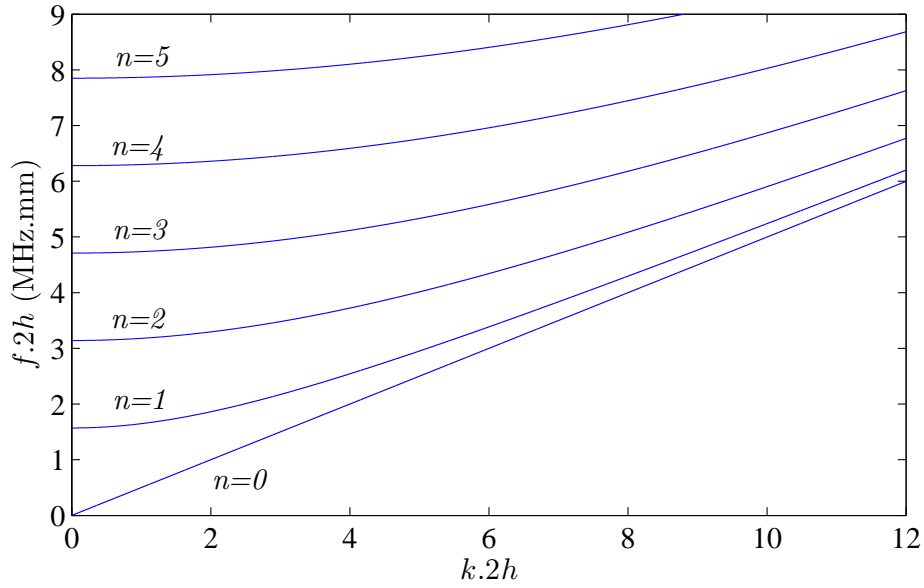


FIGURE I.11 – Courbes de dispersion des six premiers modes de cisaillement horizontal SH_0 , SH_1 , SH_2 , SH_3 , SH_4 , SH_5 dans une plaque d'aluminium.

On voit que seul le mode transversal horizontal fondamental est non dispersif. Pour la direction de propagation $[100]$ dans une plaque de silicium (100), la vitesse de l'onde de cisaillement horizontale vaut 4673 m/s (cf. tableau I.3 plus loin). Pour une plaque de 410 μm d'épaisseur la fréquence de coupure du premier mode d'ordre supérieur SH_1 se situe à environ 6 MHz. Tout au long de ce manuscrit, les études expérimentales que je présenterai concerneront principalement des gammes de produits {fréquence \times épaisseur} faibles. Ainsi, parmi les différents modes de cisaillement horizontal possibles, seul le mode SH_0 se propagera dans nos plaques.

I.2.4 Propagation dans les cristaux à symétrie cubique, cas particulier du silicium

La propagation d'ondes en milieu anisotrope présente des différences importantes par rapport au cas isotrope. En particulier la polarisation des trois ondes de volume n'est plus nécessairement parallèle ou perpendiculaire à la direction de propagation. On parle alors d'ondes quasi-longitudinale et quasi-transversales. Contrairement au cas isotrope, l'onde de surface en milieu anisotrope peut résulter de la combinaison linéaire de trois, deux, ou même une seule, onde(s) de volume non homogène(s).

Le comportement anisotrope du milieu modifie donc considérablement l'existence et la structure des ondes de surface qui se propagent à la surface libre d'un milieu [27].

Considérer l'anisotropie implique généralement une résolution complexe nécessitant l'élaboration de méthodes numériques. Cependant certaines classes de symétrie peuvent se traiter analytiquement^e. C'est en particulier le cas du système cubique auquel appartient le silicium et qui constitue le cas d'anisotropie le plus simple de par son haut degré de symétrie. Les raisons qui nous ont poussés à choisir le silicium pour nos échantillons expérimentaux seront évoquées dans la partie expérimentale du chapitre. Le nombre de constantes indépendantes décrivant le comportement élastique d'un cristal à symétrie cubique est réduit à trois. Le loi de Hooke s'écrit alors comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{I.51})$$

On trouve les constantes du tenseur des rigidités du silicium dans de nombreux articles [28, 29]. Les plus précises semblent être les suivantes [30] (précision de 0.02%, à température ambiante et pression atmosphérique) :

$$\begin{cases} C_{11} &= 165.64 \text{ GPa} \\ C_{12} &= 63.94 \text{ GPa} \\ C_{44} &= 79.51 \text{ GPa} \end{cases}$$

Ces valeurs seront celles adoptées dans toutes les applications numériques de ce manuscrit.

^e. nous n'avons pas effectué ces développements analytiques, ceux-ci sortant du cadre de cette thèse essentiellement expérimentale

Notons par ailleurs que pour contourner les difficultés liées à l'anisotropie, il est parfois d'usage de recourir à des approximations isotropes qui consistent à définir des quantités qui caractérisent le comportement élastique "moyen" du solide anisotrope. Par exemple, la moyenne de Voigt [31] définit les modules de cisaillement μ , coefficient de Poisson ν et module d'Young E moyens d'un solide anisotrope :

$$\mu = 0.2C_{11} - 0.2C_{12} + 0.6C_{44} \quad (\text{I.52})$$

$$\nu = \frac{0.1C_{11} + 0.4C_{12} - 0.2C_{44}}{0.4C_{11} + 0.6C_{12} + 0.2C_{44}} \quad (\text{I.53})$$

$$E = 2\mu(1 + \nu) \quad (\text{I.54})$$

qui dans le cas du silicium donnent :

$$\mu = 68.0 \text{ GPa} \quad (\text{I.55})$$

$$\nu = 0.22 \quad (\text{I.56})$$

$$E = 165.7 \text{ GPa} \quad (\text{I.57})$$

Le silicium présente une structure cristalline de type diamant (cf. figure I.12), forme dérivée de la maille cubique à faces centrées dont la moitié des huit sites tétraédriques est occupée (atomes en foncé sur la figure). La structure diamant est donc équivalente à deux réseaux c.f.c décalés de $\frac{1}{4}$ dans les trois directions de l'espace.

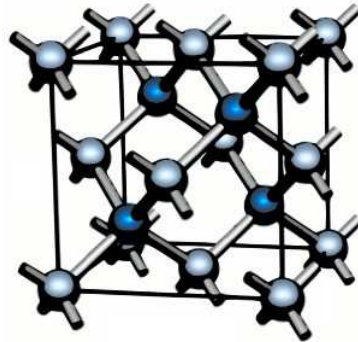


FIGURE I.12 – Structure cristalline en diamant du silicium.

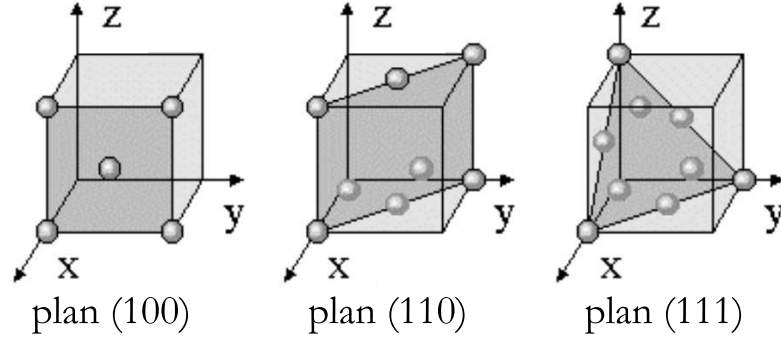


FIGURE I.13 – Les différents plans de découpe usuels du silicium. Dans chaque cas les atomes compris dans le plan considéré sont représentés (Tiré de [29]).

Dans un monocristal de silicium et plus généralement dans tout matériau anisotrope, la vitesse de propagation des ondes acoustiques va dépendre de l'orientation du plan du cristal vis-à-vis des axes cristallins et de la direction de propagation dans ce même plan. Les plans (notés entre parenthèse) et directions (notées entre crochets) du cristal sont décrits en utilisant la notation de Miller (cf. annexe D dans [6]). La figure (I.13) montre différentes coupes cristallographiques que l'on trouve usuellement pour un cristal de silicium.

Les axes x, y et z coïncident respectivement avec les directions $[100], [010]$ et $[001]$ et les plans $(100), (110)$ et (111) sont orthogonaux aux directions de mêmes indices. Chaque cas fait apparaître le nombre d'atomes de silicium présents dans la coupe. On voit que le plan (111) présente la plus forte densité atomique. Dans ce cas particulier d'orientation, les module d'Young, coefficient de Poisson et module de cisaillement sont indépendants de la direction cristallographique considérée, contrairement aux orientations (100) et (110) [26]. Un tel matériau peut donc être considéré comme isotrope.

Le calcul des vitesses des trois ondes de volume selon n'importe quelle orientation d'un cristal cubique revient à résoudre l'équation suivante [32] :

$$\begin{vmatrix} l^2 C_{11} + (m^2 + n^2) C_{44} - \rho c^2 & lm(C_{12} + C_{44}) & ln(C_{12} + C_{44}) \\ lm(C_{12} + C_{44}) & m^2 C_{11} + (l^2 + n^2) C_{44} - \rho c^2 & mn(C_{12} + C_{44}) \\ ln(C_{12} + C_{44}) & mn(C_{12} + C_{44}) & n^2 C_{11} + (l^2 + m^2) C_{44} - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (I.58)$$

50 Chapitre I. Ondes élastiques de surface : réalisation expérimentale

où les indices l, m et n sont les cosinus directeurs^f suivant les axes x, y et z de la direction de propagation considérée ($l^2 + m^2 + n^2 = 1$).

A titre d'exemple, calculons les expressions des vitesses le long de la direction $[110]$: les solutions s'obtiennent en injectant les valeurs $l = m = \frac{1}{\sqrt{2}}, n = 0$ dans l'équation I.58 :

$$\begin{vmatrix} l^2 C_{11} + m^2 C_{44} - \rho c^2 & lm(C_{12} + C_{44}) & 0 \\ lm(C_{12} + C_{44}) & m^2 C_{11} + l^2 C_{44} - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & (l^2 + m^2)C_{44} - \rho c^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{I.59})$$

La résolution de cette dernière mène à l'expression des trois vitesses volumiques :

$$c_1 = c_L = \sqrt{\frac{C_{11} + C_{12} + 2C_{44}}{2\rho}} \quad \text{polarisée suivant } [110] \quad (\text{I.60})$$

$$c_2 = c_{T1} = \sqrt{\frac{C_{11} - C_{12}}{2\rho}} \quad \text{polarisée suivant } [\bar{1}\bar{1}0] \quad (\text{I.61})$$

$$c_3 = c_{T2} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad \text{polarisée suivant } [001] \quad (\text{I.62})$$

En procédant de même dans les deux autres directions principales du réseau cubique, on trouve :

– suivant la direction $[100]$, on a :

$$c_1 = c_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \quad \text{polarisée suivant } [100] \quad (\text{I.63})$$

$$c_2 = c_3 = c_T = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad \text{polarisée dans le plan } (100) \quad (\text{I.64})$$

– suivant la direction $[111]$, on a :

$$c_1 = c_L = \sqrt{\frac{C_{11} + 2C_{12} + 4C_{44}}{3\rho}} \quad \text{polarisée suivant } [111] \quad (\text{I.65})$$

$$c_2 = c_3 = c_T = \sqrt{\frac{C_{11} - C_{12} + C_{44}}{3\rho}} \quad \text{polarisée dans le plan } (111) \quad (\text{I.66})$$

f. les cosinus directeurs sont les cosinus des angles formés par la direction considérée avec les axes du repère de référence

Les valeurs de ces vitesses dans le cas du silicium sont présentées dans le tableau I.3.

TABEAU I.3 – Valeurs des vitesses des ondes de volume dans le silicium selon différentes directions de propagation.

direction de propagation	polarisation	valeur des vitesses (m/s)
[100]	[100]	$c_L = 8433$
	plan (100)	$c_T = 5843$
[110]	[110]	$c_L = 9134$
	$[1\bar{1}0]$	$c_T = 4673$
	[001]	$c_T = 5843$
[111]	[111]	$c_L = 9356$
	plan (111)	$c_T = 5093$

Parker et Mayer [33] ont montré par ailleurs que la somme des carrés des trois vitesses dans un cristal cubique est invariante et vaut $(C_{11} + 2C_{44})/\rho$. Par conséquent la connaissance de deux vitesses est suffisante puisqu'elle permet d'en déduire la troisième.

Notons enfin que la symétrie cubique implique l'équivalence des plans (100), (010) et (001). De manière plus générale, si on considère les plans (hkl), alors tous les plans obtenus par permutation des indices et par leur changement de signe sont équivalents : on parle alors de famille de plans {hkl}. Ainsi, à titre d'exemple la famille {100} comprend les six plans (100), (010), (001), $(\bar{1}00)^g$, $(0\bar{1}0)$, $(00\bar{1})$ et la famille {110} les neuf plans (110), (101), (011), $(\bar{1}\bar{1}0)$, $(1\bar{1}0)$, $(0\bar{1}\bar{1})$, $(01\bar{1})$, $(\bar{1}10)$ et $(1\bar{1}0)$. De même, les directions cristallographiques obtenues par permutation et changement de signe des indices de Miller sont équivalentes, on parle donc de famille de rangées $\langle uvw \rangle$.

g. $\bar{1}$ doit se lire "moins 1"

I.3 Génération et détection optiques des ultrasons

Les méthodes de génération et de détection optiques des ultrasons ont vu le jour quelques années après l'avènement du laser [34], il y a cinquante ans. C'est précisément en 1963 que White [35] démontre la génération par faisceau laser d'ondes acoustiques dans un solide. Contrairement aux méthodes "classiques" par transducteur piézoélectrique de contact, les systèmes totalement optiques possèdent l'avantage de proposer une mesure large bande, sans contact, avec la possibilité de sonder des matériaux de forme complexe, qui peuvent être en mouvement et à très haute température [36]. Durant ces vingt dernières années, les nombreuses études considérant l'utilisation couplée d'une génération et d'une détection optique des ultrasons ont donné naissance à une nouvelle spécialité baptisée "Ultrasons-Laser". Cette dernière, en plein essor, trouve de nombreuses applications dans la détection de défauts et la caractérisation des matériaux [37–39]. Une conférence internationale lui est même dédiée depuis 2008^h.

I.3.1 Génération d'ultrasons par laser

La génération d'ultrasons par laser dépend des paramètres du faisceau laser (longueur d'onde, puissance incidente, taille, forme, durée) et des propriétés optique, thermique, élastique et électronique du matériau.

En régime nanoseconde, les sources les plus utilisées sont le laser impulsif déclenché (Q-switched) Nd :YAG constitué d'un cristal $Y_3Al_5O_{12}$ (Grenat d'Aluminium et d'Yttrium) dopé au néodyme et le laser CO_2 [41]. Actuellement, le diagnostic mécanique des systèmes nanométriques ou submicrométriques imposent des sources laser de durées ultra-courtes (régimes picoseconde, femtoseconde voire attosecondeⁱ). L'outil utilisé dans ces régimes est généralement le laser Titane-Saphire.

h. "LU 2008" à Montréal, Canada ; "LU 2010" à Bordeaux, France ; "LU 2012" en prévision au Japon [40]

i. $10^{-18}s$

Même si la plupart des lasers de génération d'ultrasons sont de type impulsionnel, il est possible de générer des ultrasons à l'aide de lasers continus modulés de faible puissance. Cependant, dans ce cas, l'amplitude des ultrasons est très faible et le bruit thermique capté par les détecteurs optiques domine le signal reçu. Il est alors nécessaire d'utiliser une détection synchrone pour extraire le signal du bruit.

Suivant la densité de puissance absorbée, l'impact d'une impulsion lumineuse sur la surface libre d'un solide opaque engendre des ondes élastiques selon différents mécanismes qui relèvent de deux catégories : le régime **thermoélastique** et le régime **d'ablation**.

I.3.1.1 Régime thermoélastique

Ce régime concerne les faibles puissances lumineuses. L'augmentation de température due à l'absorption du rayonnement laser est suffisamment faible pour éviter un changement d'état du solide, et des contraintes élastiques sont obtenues par dilatation (ou plus rarement contraction) thermique du solide en surface. Pour un matériau isotrope, l'impulsion laser donne naissance à une source acoustique compressive [42] qui engendre des ondes se propageant parallèlement à la surface libre (cf. figure I.14). Plus profond, la source génère des ondes polarisées verticalement qui, lorsqu'elles interagissent avec les précédentes, donnent naissance à des ondes de Rayleigh ou de Lamb dans une plaque mince.

Le faisceau laser pénètre dans le matériau sur une distance égale à ξ , la profondeur de pénétration optique, définie comme l'inverse du coefficient d'absorption optique du matériau. L'évolution de ξ en fonction de la longueur d'onde d'émission du laser est indiquée dans le cas du silicium dans la figure I.15. Les deux valeurs qui nous concernent se situent dans l'infra-rouge à 1064 nm (longueur d'onde fondamentale d'émission du laser Nd :YAG) et dans le visible à 532 nm (fréquence fondamentale doublée) dont les valeurs respectives de profondeur de pénétration optique sont $\xi_{I.R} \approx 1$ mm et $\xi_{vert} \approx 1$ μ m. Une plaque de silicium de moins de 1 mm d'épaisseur sera donc transparente dans l'infra-rouge.

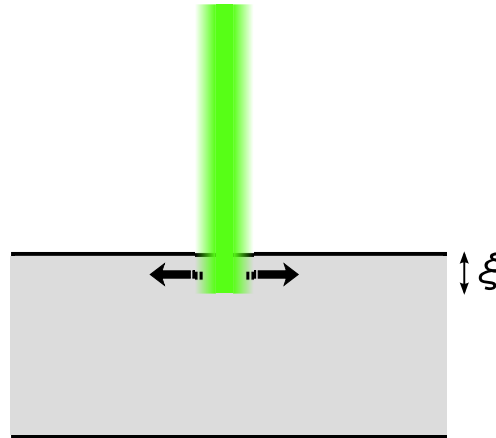


FIGURE I.14 – Régime thermoélastique : le faisceau laser pénètre dans le matériau sur la profondeur optique ξ et crée une source acoustique compressive parallèle à la surface.

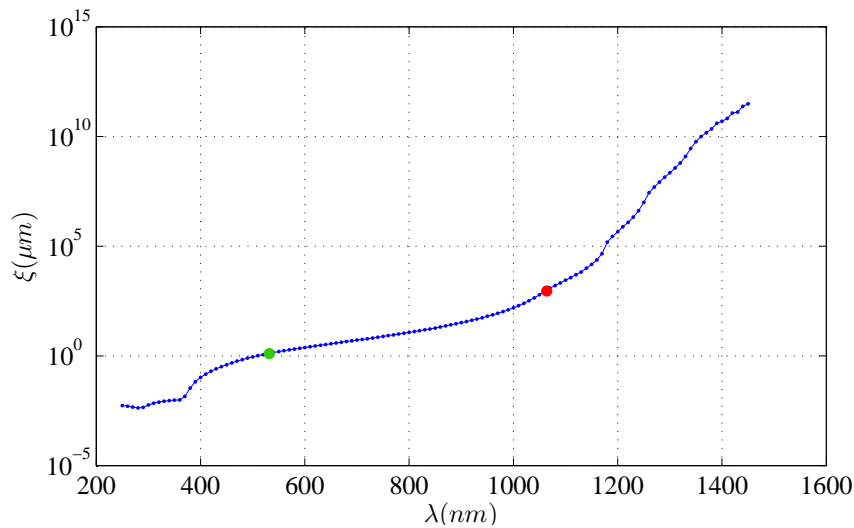


FIGURE I.15 – Evolution de la profondeur de pénétration optique pour le silicium en fonction de la longueur d'onde des photons incidents, tiré de [43]. Les valeurs pour un faisceau lumineux incident vert (532 nm) et infrarouge (1064 nm) sont respectivement marquées par un disque vert et rouge.

De nombreuses études [42, 44–46] présentent différents modèles théoriques de génération d’ondes acoustiques par un impact laser ponctuel ou linéique. Les modèles les plus complets prennent en considération les mécanismes optique, thermique et électronique du processus de génération d’ultrasons par laser.

Dans le cas d’impulsions laser nanosecondes, sans tenir compte des phénomènes de diffusion thermique et électronique, les caractéristiques spatiales et fréquentielles de la source acoustique dépendent des paramètres du faisceau laser et des propriétés du matériau. En particulier, les longueurs d’ondes générées dépendent de la taille caractéristique Γ de la source : celle-ci est égale au diamètre de la tâche focale $2a$ auquel on ajoute la distance parcourue par l’onde de compression pendant la durée de l’impulsion τ_L , autrement dit le produit $2c_L\tau_L$. Cependant, cette dernière est négligeable dans nos cas expérimentaux où le diamètre de l’impact laser est millimétrique. On a donc $\Gamma \approx 2a$.

Lorsqu’elle est prise en compte, la diffusion thermique implique une étendue spatiale que l’on quantifie par la longueur de diffusion thermique l_{th} , dont l’expression est la suivante [42] :

$$l_{th} = \sqrt{D_{th}\Delta} \quad (\text{I.67})$$

où D_{th} est la diffusivité thermique et Δ le temps écoulé pour que les ondes quittent la zone d’excitation optique de taille Γ , soit Γ/c_L .

Les modèles faisant intervenir les phénomènes de diffusion électronique sont plus rares. Ils contribuent, tout comme la diffusion thermique, à élargir la zone d’excitation optique. Ainsi, selon les matériaux, la profondeur de pénétration effective peut être multipliée par un facteur 10 (cas de l’or [42]) par rapport à la profondeur de pénétration optique initiale.

Le cas des semi-conducteurs est à distinguer de celui des autres matériaux [46, 47]. Alors que l’origine de la génération ultrasonore optique est essentiellement thermique dans la plupart des solides [48] (dont les métaux), une autre contribution d’origine électronique peut parfois dominer la génération thermique dans le cas des semi-conducteurs [49, 50]. En effet, un faisceau laser incident d’énergie supérieure ou égale au gap (ou bande interdite) crée une population de porteurs de charge (élec-

trons et trous) en excès dans le matériau qui, suite à des phénomènes complexes de recombinaison, va créer une source acoustique d'origine non thermique. Il faut savoir que le temps de recombinaison électronique dépend de l'énergie incidente, impliquant ainsi une non linéarité vis-à-vis de l'énergie du faisceau laser incident, contrairement aux modèles ne considérant qu'une génération thermoélastique [45].

L'énergie du photon incident est donnée par la relation $E = h\nu$ où h est la constante de Planck et ν la fréquence du photon. Lorsque le laser émet dans l'infrarouge à $\lambda = 1064$ nm, l'énergie d'un photon vaut 1.17 eV contre 2.33 eV dans le vert à $\lambda = 532$ nm. Ces quantités sont à comparer avec la bande interdite (ou gap) du silicium dont l'évolution en fonction de la température est donnée par la relation suivante [51] :

$$E_g(T) = 1.1557 - \frac{7.021 T^2}{T + 1108} \quad (\text{I.68})$$

A 300 K, il vaut 1.11 eV. La génération électronique sera donc plus importante dans le vert que dans l'infrarouge. Mais c'est sans compter sur l'influence de l'énergie lumineuse incidente. En effet, pour des densité de puissance lumineuse élevées (mais inférieures au seuil d'ablation), l'origine thermique de la génération domine celle due à la création de porteurs, ceci étant du à la décroissance du temps de recombinaison des porteurs de charge [52]. Ce dernier point important nous amène à conclure que la génération ultrasonore par laser dans nos expériences est essentiellement d'origine thermique compte tenu de nos régimes de puissances lumineuses proches du régime d'ablation.

I.3.1.2 Régime d'ablation

En régime thermoélastique, l'amplitude des ultrasons générés croît linéairement en fonction de la valeur de l'intensité lumineuse au centre du faisceau laser [53], jusqu'à une certaine valeur d'intensité au-delà de laquelle l'amplitude varie peu dans une large gamme d'intensités. Pour des valeurs plus élevées de puissances lumineuses, l'impact laser provoque la fusion puis la vaporisation d'une petite quantité de matière. On entre alors dans le régime d'ablation pour lequel l'amplitude des ultrasons est cette fois-ci proportionnelle au carré de l'intensité lumineuse [32].

Dans ce cas, le transfert de quantité de mouvement dû à l'éjection des particules crée dans la zone irradiée une force normale à la surface (cf. figure I.16).

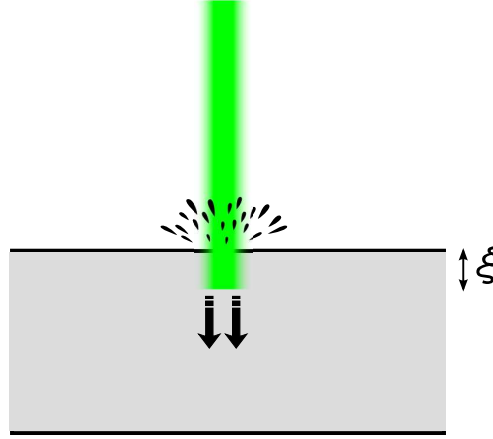


FIGURE I.16 – Régime d'ablation. Pour une densité d'énergie lumineuse (fluence) incidente supérieure au seuil d'ablation, la force résultante est essentiellement normale à la surface et s'accompagne d'une éjection de matière.

Le seuil au-delà duquel on entre dans le régime d'ablation s'exprime usuellement en terme de rapport de la densité de puissance lumineuse incidente sur la surface irradiée^j. Une expression du seuil d'ablation I_{seuil} en fonction des paramètres du matériau et du faisceau laser a été déterminée par Ready en 1965 [41, 54] :

$$I_{seuil}(\text{W/cm}^2) = \left(\frac{\pi K \rho C_m}{4\tau} \right)^{\frac{1}{2}} (T_v - T_i) \quad (\text{I.69})$$

avec :

- K (W/m.K) la conductivité thermique du matériau,
- C_m (J/kg.K) la capacité thermique massique,
- T_i (K) la température initiale du matériau,
- T_v (K) sa température de vaporisation,
- ρ (kg/m³) sa masse volumique,
- τ (s) la durée de l'impulsion laser.

Dans le cas d'un échantillon de silicium dont la température initiale est de 20°C et

j. on parle aussi de *fluence* lorsque ce rapport est exprimé en terme d'énergie

pour une impulsion laser de durée 7.7 ns, on a :

$$I_{seuil} = \left(\frac{\pi \times 141.2 \times 2329 \times 700}{4 \times 7.7 \times 10^{-9}} \right)^{\frac{1}{2}} (2628 - 293) \approx 35.780 \times 10^6 \text{ W/cm}^2$$

soit environ 36 MW/cm².

Cependant, il faut garder à l'esprit que cette formule n'est qu'une estimation de la valeur du seuil d'ablation. Elle ne prend pas en considération la dépendance vis-à-vis de la longueur d'onde incidente [55]. En particulier le seuil sera d'autant plus bas que la profondeur de pénétration optique sera faible. Frass *et al.* [56] présentent une synthèse des différentes valeurs du seuil d'ablation du silicium que l'on trouve dans la littérature. Ces dernières diffèrent parfois d'un facteur 2 voire 3, ceci étant principalement dû aux problèmes liés à la détermination exacte de la surface de l'impact laser. Ils trouvent un seuil de fluence d'environ 340 mJ/cm² dans l'ultra-violet pour une durée d'impulsion de 180 ps, qui se transpose dans le visible à l'aide de la relation suivante (déduite de l'équation (4) dans [56]) :

$$F_{seuil}^{VIS} = \frac{F_{seuil}^{UV}}{\sqrt{D_{th}\tau(ps)\alpha}} \quad (I.70)$$

qui donne environ 6 J/cm². Toutes ces observations nous amènent à abandonner l'idée d'avoir une valeur théorique précise du seuil d'ablation pour le silicium. Pour nos expériences, nous veillerons à nous placer en-dessous de ce seuil en observant au préalable l'état de surface de l'échantillon pour différents puissances lumineuses incidentes à l'aide d'un microscope.

Pour des densités de puissance encore plus élevées, il peut y avoir ionisation de la matière éjectée et formation d'un plasma à la surface de l'échantillon. Ce plasma engendre une onde de choc dans l'air qui par conversion à la surface de l'échantillon, génère à son tour des ondes élastiques dans le solide. Ce procédé de génération d'ondes acoustiques trouve son application en science des matériaux sous le nom de PLD (Pulsed Laser Deposition) pour la réalisation de couches minces sur différents substrats [57]. Il est à noter que la formation de plasma n'est possible que pour des impulsions suffisamment longues (typiquement τ_L supérieur à la picoseconde), laissant ainsi le temps à la matière éjectée d'interagir avec l'impulsion laser. Pour

des impulsions courtes (en-dessous de la picoseconde), la formation de plasma n'est plus possible.

On parle par ailleurs de régime cumulé (ou encore régime de génération contrainte [58]), lorsqu'on considère la superposition des effets du régime thermoélastique et du régime d'ablation. C'est par exemple le cas lorsqu'on recouvre la surface de l'échantillon d'un film liquide qui sera vaporisé lors de l'impact. Dans cette situation, on bénéficie des contraintes normales élevées du régime d'ablation tout en préservant l'échantillon d'une détérioration. C'est une façon d'augmenter l'amplitude des ultrasons générés. Cependant cette méthode pose un problème évident de reproductibilité et sera donc à proscrire dans le cas d'expériences de longue durée.

Notons enfin que la forme du signal généré en régime thermoélastique reste la même pour différentes énergies alors qu'en régime d'ablation celle-ci varie en fonction de la densité de puissance incidente^k.

I.3.2 Détection sans contact

Par rapport aux dispositifs de mesures "classiques" par capteur piézoélectrique de contact, les méthodes optiques présentent l'avantage d'une mesure sans contact avec une bande passante large, bien qu'avec une sensibilité moindre.

Il existe deux catégories de détecteurs optiques : les sondes non interférométriques qui exploitent la déflexion ou la diffraction du faisceau lumineux, et les sondes interférométriques qui exploitent la modulation de la phase ou de la fréquence du faisceau lumineux se réfléchissant sur la surface vibrante [41, 59].

Le principe des méthodes interférométriques est le suivant : un laser continu ou pulsé^l émet un faisceau qui est réfléchi (ou diffusé) par la surface à sonder puis combiné à un faisceau de référence. Le déphasage optique est alors converti en modulation d'amplitude qui est détectable par une photodiode. De nombreux articles de revues présentent une comparaison des méthodes de mesure optiques des ultra-

k. ce point sera vérifié plus loin dans la partie qui traite de la description du dispositif expérimental

l. la durée de l'impulsion doit être suffisamment longue pour pouvoir capter la totalité du signal ultrasonore utile

sons (voir par exemple [60]).

Dans notre cas, la détection de la composante normale des ondes de Lamb à la surface du wafer de silicium se fait par une méthode interférométrique dite hétérodyne, ce qui signifie qu'un des 2 faisceaux laser est transposé dans le domaine des radio-fréquences, à 70 MHz (cf. figure I.17). Dans un montage homodyne (sans décalage de fréquence), le rapport signal sur bruit est beaucoup plus faible du fait des bruits mécaniques, électroniques et des bruits techniques du laser, essentiellement basses fréquences.

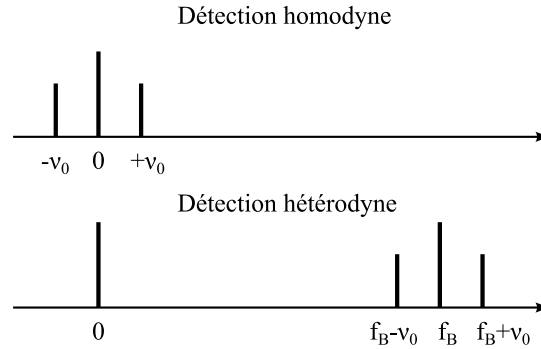


FIGURE I.17 – Principe de l'hétérodynage : le signal utile est transposé autour de la fréquence f_B (fréquence de Bragg) pour s'affranchir des bruits basses fréquences.

La sonde optique hétérodyne conçue par D.Royer et E.Dieulesaint [61] a une résolution de $10^{-4} \text{Å} / \sqrt{Hz}$ (sensibilité d'autant plus grande que le signal est détecté dans une bande passante plus étroite) qui lui permet de mesurer des déplacements de quelques angströms. Cette sensibilité est limitée par le bruit de photon sur la photodiode destinée à convertir la modulation de phase optique en courant électrique. Le faisceau lumineux est fourni par un laser Nd :YAG d'une longueur d'onde de 532 nm et d'une puissance de 100 mW. La distance entre la sonde et l'échantillon peut être comprise entre 50 et 150 mm. La résolution latérale de la sonde est quant à elle limitée par le diamètre du faisceau laser, soit environ 50 μm . La sonde propose, suivant l'application, six choix de bande passante : [20 kHz - 4 MHz], [20 kHz - 18 MHz], [20 kHz - 45 MHz], [200 kHz - 4 MHz], [200 kHz - 18 MHz] et [200 kHz - 45 MHz]. Nos fréquences d'études expérimentales relativement faibles feront que nous prendront comme limite haute le filtre à 4 MHz.

La limite basse (20 ou 200 kHz) dépendra du type d'échantillon qu'on étudiera. L'idéal étant de cibler au mieux les fréquences qui nous intéressent et de restreindre la bande passante autour de celles-ci pour optimiser le rapport signal/bruit.

La figure I.18 illustre la partie optique de la sonde, de type Mach-Zehnder. Le faisceau laser incident de fréquence f_L et de polarisation horizontale, est divisé par le cube séparateur A en un faisceau de référence (R) et un faisceau sonde (S). Le premier est dirigé par un prisme de Dove vers la photodiode. Le deuxième, décalé en fréquence par un modulateur acousto-optique (ou cellule de Bragg) de fréquence f_B , est réfléchi par l'échantillon qui vibre à la fréquence ν_0 . Ayant traversé deux fois la lame quart d'onde, il revient polarisé verticalement pour être réfléchi, à 90° , par le cube séparateur de polarisation B, en direction de la photodiode. Pour pouvoir interférer, les deux faisceaux doivent avoir la même polarisation. Pour ce faire, ils traversent un analyseur orienté à 45° de leur polarisation. La photodiode délivre alors un courant à la fréquence f_B dont la phase est modulée par la vibration à la fréquence ν_0 de la surface de l'échantillon. L'expression de ce courant est établi dans l'annexe C.

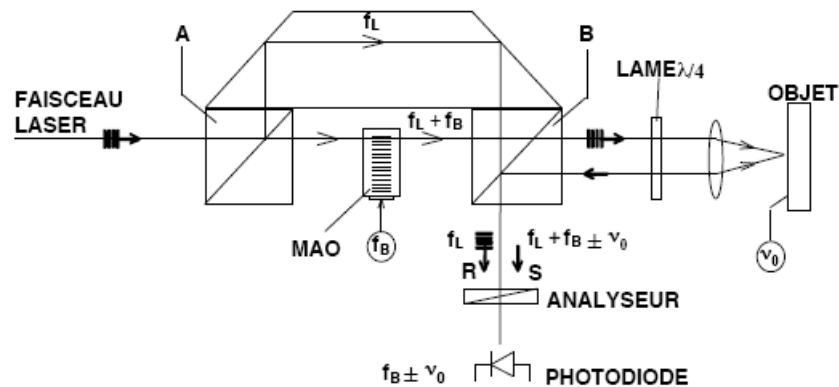


FIGURE I.18 – Dispositif optique de type Mach-Zehnder de la sonde laser interférométrique hétérodyne.

Une détection électronique cohérente démodule le signal porteur et permet de récupérer un signal directement proportionnel au déplacement normal de la surface. Un dispositif de contrôle automatique du gain de l'onde porteuse permet en outre de compenser, avec une dynamique proche de 60 dB, les variations de réflectivité des cibles. Il maintient l'amplitude de l'onde porteuse à un niveau de référence constant (0 dBm). Malgré cela, l'état de surface des matériaux sondés doit permettre une bonne réflexion du faisceau sonde. Dans le cas contraire, il existe des méthodes exploitant l'effet photoréfractif [62, 63] dont le principe de fonctionnement repose sur l'interférence de l'onde de référence avec le "speckle" du faisceau réfléchi.

D'autres méthodes interférométriques exploitent quant à elle la modification de la fréquence du faisceau sonde par effet Doppler lorsqu'il interagit avec le matériau sondé. C'est le cas de la vélocimétrie laser [64].

Rappelons que ces méthodes de mesure sont ponctuelles. Des travaux récents sur l'holographie [65] permettent d'entrevoir une extension du principe de la sonde interférométrique hétérodyne ponctuelle à une méthode de mesure en temps réel permettant de relever le champ de déplacement sur des zones de plusieurs cm^2 (mais avec une sensibilité moindre).

I.4 Dispositif expérimental

I.4.1 Présentation

Une vue globale du montage expérimental est présentée dans la figure I.19. Les différents instruments sont disposés sur une table optique montée sur vérins pneumatiques, ce qui permet une isolation vis-à-vis des vibrations solidiennes ambiantes.

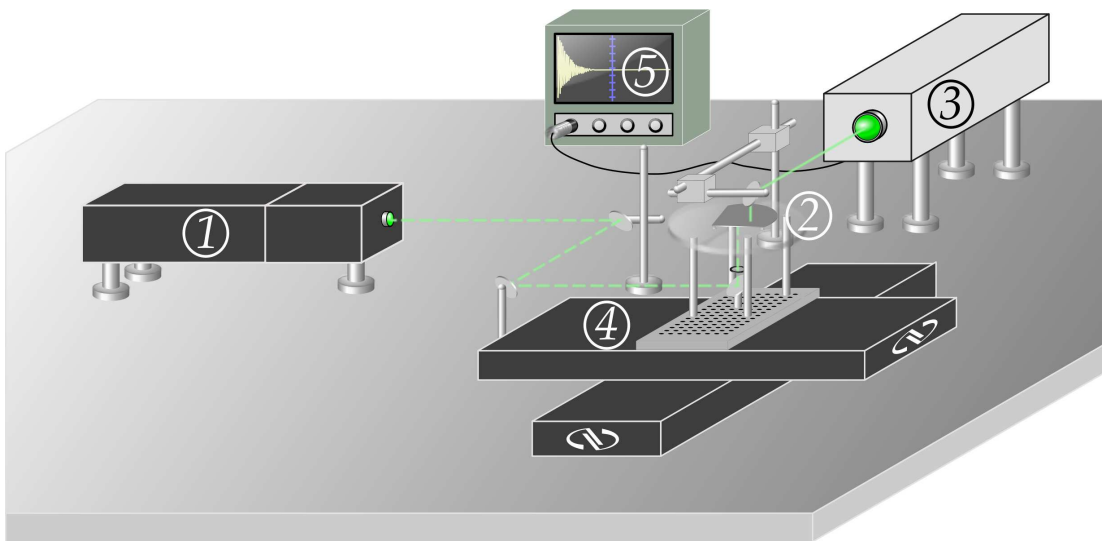


FIGURE I.19 – Schéma de l'expérience : ① Laser d'excitation, ② Echantillon, ③ Laser sonde, ④ Platines de translation, ⑤ Oscilloscope/PC d'acquisition.

I.4.1.1 Types d'échantillon et matériau

Nous avons opté pour le silicium comme matériau d'étude. Les motivations qui nous ont poussés à faire ce choix sont les suivantes :

- il présente de faibles pertes intrinsèques
- il possède une bonne réflectivité, ce qui est nécessaire pour un fonctionnement optimal de la sonde laser
- sa dureté est élevée, assurant une planéité sur de grandes surfaces
- il dispose d'un bon état de surface grâce au polissage

64 Chapitre I. Ondes élastiques de surface : réalisation expérimentale

Le silicium est en outre facilement usinable et bénéficie des technologies avancées en micro-électronique. Ceci est intéressant dans l'optique de l'étude de la propagation en milieu désordonné, qui implique l'usinage d'hétérogénéités dans la plaque.

La plupart des wafers de silicium ne sont pas faits de silicium pur : des atomes d'un autre matériau y sont introduits en quantités réduites (un atome pour 10^5 à 10^8 atomes de silicium). Le rôle de ce dopage est de favoriser la conduction électrique par l'un des deux types de porteurs (électron ou trou). On parle de dopage P lorsque le dopant principal est du bore (provoquant un excès de trous) et de dopage N pour un ajout d'atomes de phosphore, arsenic ou antimoine (excès d'électrons). On retiendra que le dopage électronique peut altérer les propriétés élastiques du solide dans une échelle allant de 1 à 3% [29]. Les différents types de wafer de silicium sont illustrés dans la figure (I.20). Ils présentent un ou plusieurs méplats qui renseignent sur le plan de coupe de l'échantillon et le type de dopage.

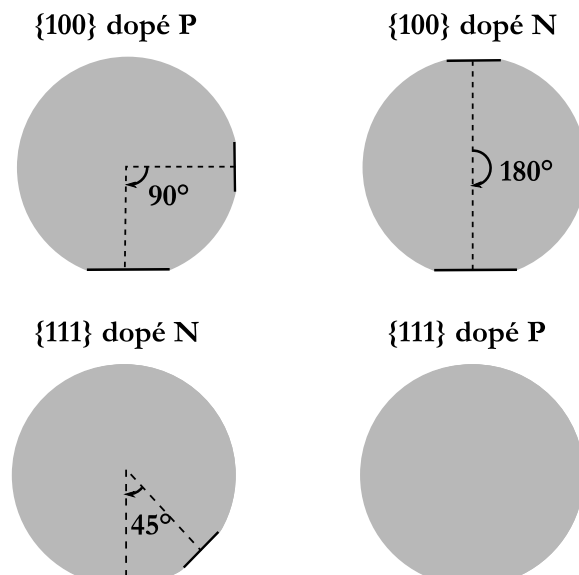


FIGURE I.20 – Les différents types de wafer de silicium. L'angle entre le méplat principal et le méplat secondaire (s'il existe) détermine l'orientation cristallographique et le type de dopage.

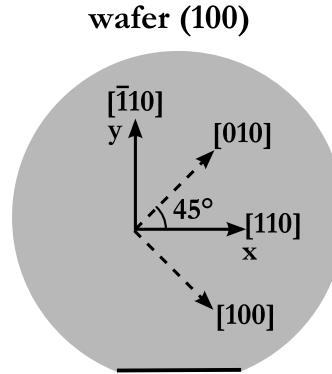


FIGURE I.21 – Wafer de silicium de type (100) avec les directions cristallographiques dans le plan indiquées.

A titre d'exemple la coupe (100)^m est présentée dans la figure I.21. On y voit les principales directions dans le plan. La vitesse est maximale pour la direction parallèle au méplat principal du wafer [110] et par conséquent toute direction de la famille $\langle 110 \rangle$. Elle est minimale à 45° suivant la direction [010] et pour toute direction de la famille $\langle 100 \rangle$. Notons que la totalité des échantillons étudiés dans les expériences décrites dans ce manuscrit seront de type (100).

I.4.1.2 Dispositifs de génération des ultrasons

I.4.1.2.1 Excitation optique par laser impulsif

La génération optique des ultrasons est assurée par un laser Nd :YAG impulsif Q-déclenché (modèle ULTRA de la société Quantel) qui fournit des impulsions dont les profils spatial (cf. figure I.22) et temporel sont gaussiens.

^m. la coupe (100) est plus fréquemment rencontrée de part la simplicité de son clivage et la facilité de l'élaboration des lingots de Si (100)

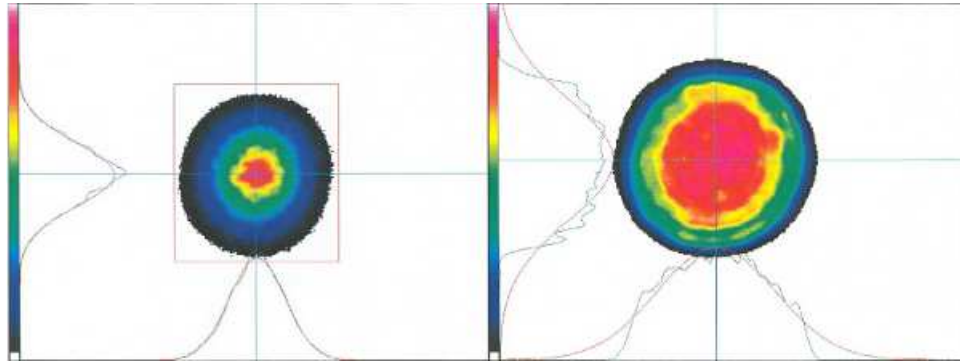


FIGURE I.22 – Allure du faisceau laser en champ proche (à droite) et en champ lointain (à gauche). *Spécifications techniques fournies par la société Quantel.*

Pour des raisons pratiques, et aussi parce que le silicium est moins absorbant dans l'infrarouge, on choisit une longueur d'onde d'émission dans le visible à 532 nm obtenue grâce à un cristal doubleur de fréquence. Les caractéristiques du faisceau laser à cette longueur d'onde sont les suivantes :

- durée de l'impulsion : 7.7 ns
- énergie maximale par impulsionⁿ : 31.3 mJ
- diamètre du faisceau en champ proche : 2.5 mm
- taux de répétition des impulsions : réglable de 1 Hz à 20 Hz

La figure (I.23) représente les différents modules de la tête laser : l'oscillateur laser ① émet une longueur d'onde fondamentale dans l'infrarouge à 1064 nm dont l'énergie peut être modifiée grâce à un atténuateur réglable à lame demi-onde ②. Un cristal non linéaire ③ génère, lorsque sa température est augmentée, l'harmonique double à 532 nm. Enfin un module séparateur d'ondes par miroirs dichroïques ④ élimine l'infrarouge résiduel et permet de fournir en sortie de tête seulement le 532 nm.

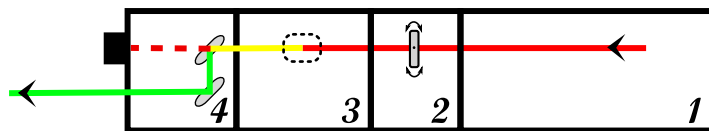


FIGURE I.23 – Schéma de la tête laser du dispositif d'excitation optique.

n. Cette valeur se dégrade peu à peu avec l'usure des lampes flashes

En pratique, on règle l'énergie incidente (typiquement en dessous du millijoule par impulsion) par la lame demi-onde pour être en dessous du seuil d'ablation afin d'éviter d'endommager la surface à sonder. Pour le choix de la cadence du laser, il faut s'assurer que la réponse du système soit finie avant de réexciter ce dernier. Elle dépend du type d'échantillon étudié et des conditions expérimentales. Nos valeurs expérimentales sont au minimum de 5 Hz et au maximum de 20 Hz.

Par ailleurs une lentille convergente permet, si besoin est, de focaliser le faisceau laser sur l'échantillon. Cependant le seuil d'ablation sera atteint pour des énergies moindres que dans le cas sans lentille. Le début du phénomène d'ablation n'étant pas visible à l'oeil nu, des tests préliminaires sont réalisés pour différentes puissances lumineuses sur différentes cibles pendant quelques minutes. Ces échantillons témoins sont ensuite observés par microscopie pour conclure sur la présence ou non de dommage. On se place ainsi dans le cas d'une puissance maximale la plus proche du seuil d'ablation afin d'optimiser le rapport signal/bruit tout en épargnant l'échantillon.

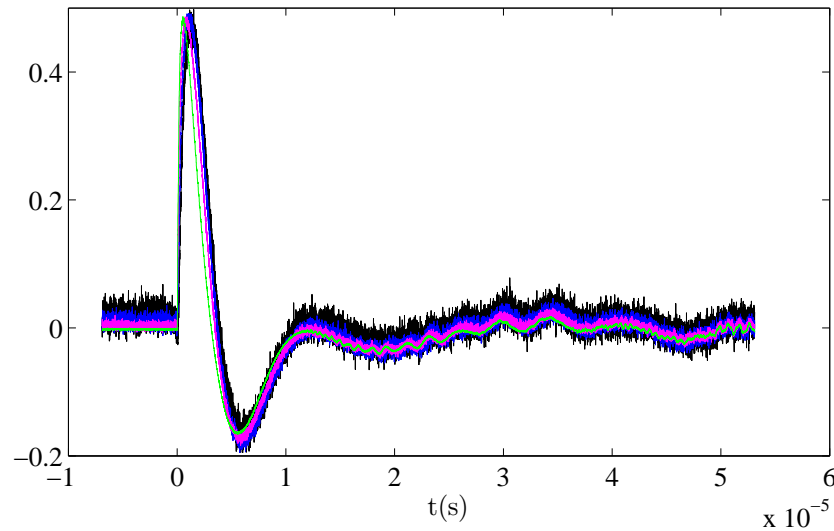


FIGURE I.24 – Evolution des cinquantes premières microsecondes d'un signal mesuré au niveau de la source laser pour différentes puissances lumineuses incidentes (dans l'ordre de puissance croissante : noir, bleu, magenta et vert). Les différentes courbes sont ramenées à la même échelle pour pouvoir être comparées.

Du moment que l'on reste dans le régime thermoélastique, l'amplitude des ultrasons générés croît linéairement en fonction de l'énergie du faisceau laser incident. Les observations expérimentales rapportées dans la figure I.24 confirment que le régime dans lequel on travaille est linéaire : on y voit le signal délivré par la sonde en un même point au niveau de la source acoustique pour différentes valeurs de puissance lumineuse incidente. Les courbes noire, bleue, magenta et verte correspondent, dans cet ordre, à des puissances croissantes (elles sont mises à l'échelle pour pouvoir les comparer qualitativement). La diminution de la puissance du faisceau laser incident entraîne une augmentation globale du bruit sur le signal mais la forme de l'onde se conserve. On note cependant un léger décalage temporel entre les différents cas (environ 800 ns entre les cas extrêmes présentés ici). En particulier, le temps d'arrivée de l'onde décroît pour des puissances lumineuses croissantes. Cette observation peut s'expliquer par une élévation locale de la température qui entraînerait l'augmentation de la célérité de l'onde acoustique générée dans la zone irradiée.

Au-delà du seuil d'ablation, la forme de l'onde change significativement comme en témoigne la figure I.25. La courbe noire est mesurée pour une faible puissance lumineuse incidente et la courbe verte correspond au régime d'ablation.

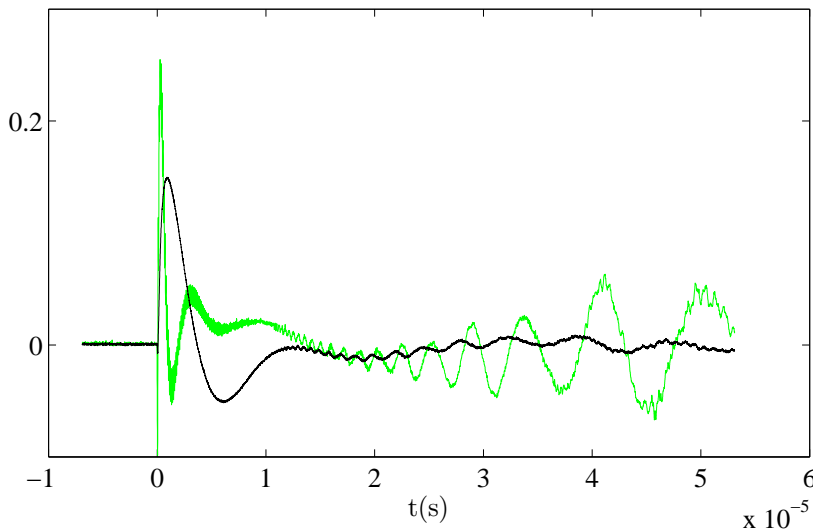


FIGURE I.25 – Comparaison de la forme de l'onde générée en régime thermoélastique (courbe noire) et en régime d'ablation (courbe verte).

I.4.1.2.2 Excitation par transducteur de contact

Nous disposons également d'un dispositif "classique" de génération ultrasonore par transducteur piézoélectrique de contact. Il est de type longitudinal et possède une fréquence centrale optimale de fonctionnement de 5 MHz avec une bande passante de 100% (modèle *Panametrics M109*). Afin de focaliser l'onde ponctuellement et d'éviter d'éventuels retours après réflexions, on colle une pointe de silice de forme conique sur la surface du transducteur (cf. figure I.26).



FIGURE I.26 – Transducteur piézoélectrique de contact + pointe de silice.

Le collage est réalisé à chaud à l'aide d'un sel de salicylate de phényle (salol) qui permet une bonne adaptation d'impédance entre les deux éléments. La pointe est obtenue dans les ateliers du LPMC et correspond à la première goutte de silice issue du tirage des fibres optiques. On obtient ainsi le même effet qu'avec les pointes en aluminium utilisées dans les expériences de retournement temporel de Draeger et Fink [66] (mais à moindre coût !).

On génère un signal impulsionnel de type "burst" (cf. figure I.27), à la fréquence et au taux de répétition désirés, à l'aide d'un générateur de fonction (modèle *Agilent 33120A*). Ce signal passe ensuite par un amplificateur de puissance (bande passante 100 kHz-50 MHz, puissance 100 W) avant d'être injecté au transducteur.

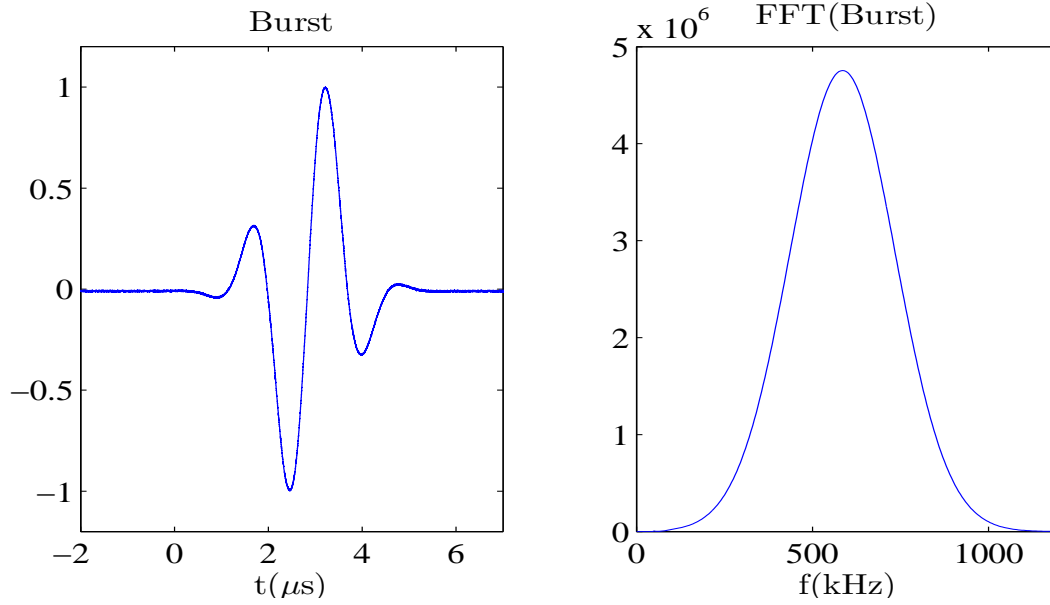


FIGURE I.27 – Allure d’une impulsion de type "burst" envoyée au transducteur de contact. La figure de droite correspond au spectre de l’impulsion.

Le tableau I.4 résume les avantages et inconvénients des deux types de génération ultrasonore dont on dispose. Bien entendu, ils n’ont pas le même poids et il conviendra d’opter pour le dispositif le mieux adapté au système que l’on veut étudier compte tenu des contraintes expérimentales.

I.4.1.3 La sonde laser interférométrique hétérodyne

On dispose d’une sonde laser interférométrique *SH140* de la société BMI. Son principe de fonctionnement est décrit dans la section I.3.2. Un miroir de renvoi permet au faisceau sonde d’atteindre l’échantillon et de régler son orientation vis-à-vis de ce dernier. Une importante phase de réglage de la sonde est effectuée préliminairement à chaque expérience. Elle consiste à maximiser l’amplitude de la porteuse en jouant sur l’orientation du miroir de renvoi et la focalisation du faisceau sonde. Il faut en outre s’assurer de l’horizontalité de l’échantillon vis-à-vis de la sonde pour disposer des mêmes performances sur la totalité de la zone sondée.

TABLEAU I.4 – Avantages et inconvénients de nos deux dispositifs de génération ultrasonore.

	<i>Laser</i>	<i>Transducteur</i>
couplage avec l'échantillon ^o	😊	😞
bande passante	😊	😞
rapport signal/bruit	😞	😊
contrôle de la source	😞	😊
reproductibilité sur de longues périodes	😞	😊
coût	😞	😊

La figure I.28 présente les 30 premières millisecondes d'un signal délivré par la sonde en un point d'un wafer de silicium de 4" et de 380 μm d'épaisseur. Les diverses origines de la décroissance du signal au cours du temps seront abordées dans la section I.4.1.5.

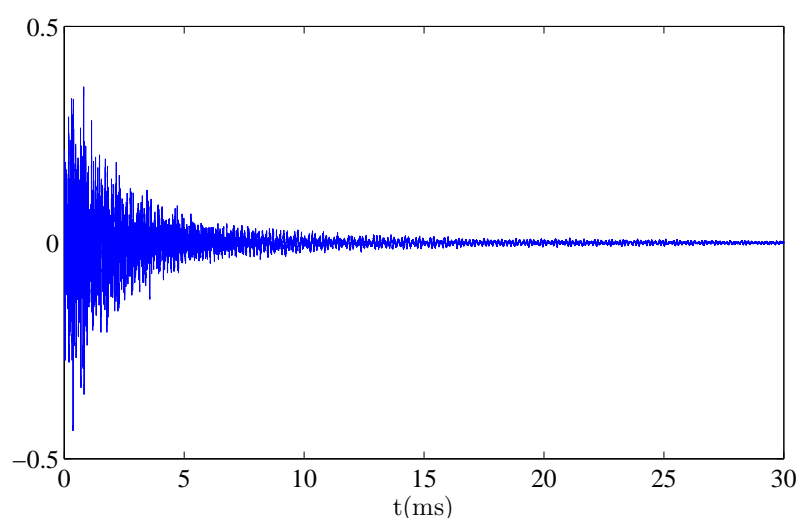


FIGURE I.28 – Exemple de signal mesuré par la sonde en un point.

o. plus précisément, le laser n'impose aucune contrainte mécanique et empêche les éventuels retours vers la source qu'on peut avoir dans le cas du transducteur

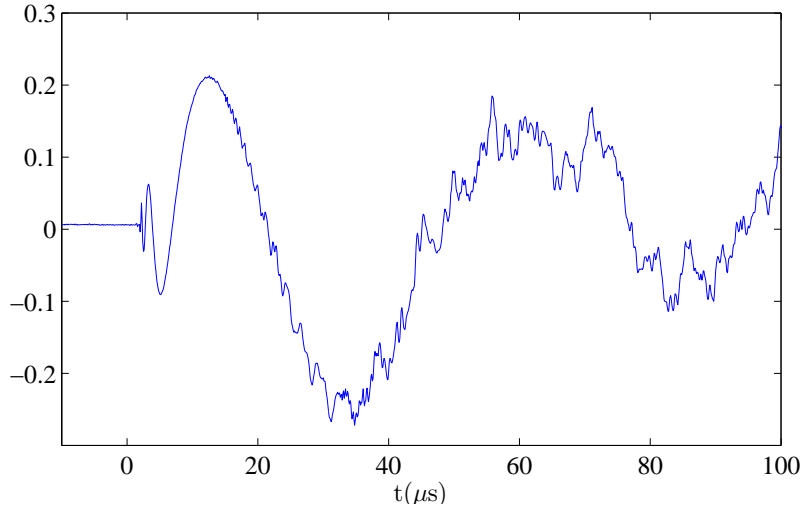


FIGURE I.29 – Début du signal mesuré par la sonde en un point.

Le début du signal précédent est montré dans la figure I.29. On y voit la naissance d'une onde hautement dispersive, l'onde de Lamb fondamentale A_0 , qui est réfléchiée par les bords du système après quelques microsecondes. L'onde S_0 qui la précède n'est pas visible ici compte tenu de sa très faible composante normale à basse fréquence.

Pour balayer la totalité de l'échantillon et récupérer ainsi toute la dynamique du champ de déplacement normal de la plaque, deux platines de translation mettent en mouvement l'échantillon et son support dans le plan XY. Elles disposent d'une précision de déplacement de $0.5\mu m$ et assurent une répétabilité unidirectionnelle $1.5\mu m$. Pour préserver la stabilité de l'échantillon, il est nécessaire d'ajuster les valeurs des vitesses et accélérations des platines pour éviter tout déplacement brusque. Il faut également s'assurer de l'horizontalité de la plaque et de son support. Une légère pente pourrait, lors d'un déplacement, provoquer un déplacement latéral de l'échantillon.

Le type de déplacement effectué par les platines est indiqué dans la figure I.30. Le choix des paramètres spatiaux (résolution spatiale δ , dimensions L_x et L_y) et temporels (résolution temporelle, durée totale du signal, nombre de coups pour effectuer une moyenne) conditionne la durée des expériences et dépendra donc du système

que l'on étudie et de ce qu'on veut en tirer. Pour avoir un ordre d'idée, la durée des expériences décrites dans ce manuscrit varie de quelques heures à une quinzaine de jours, représentant des tailles de données de quelques centaines de mégaoctets à plus de 100 gigaoctets pour les expériences les plus longues (milieux désordonnés). Ces tailles de données très importantes proviennent de la grande profondeur de mémoire nécessaire pour enregistrer toute la dynamique temporelle des signaux (de quelques μs à plusieurs dizaines de ms).

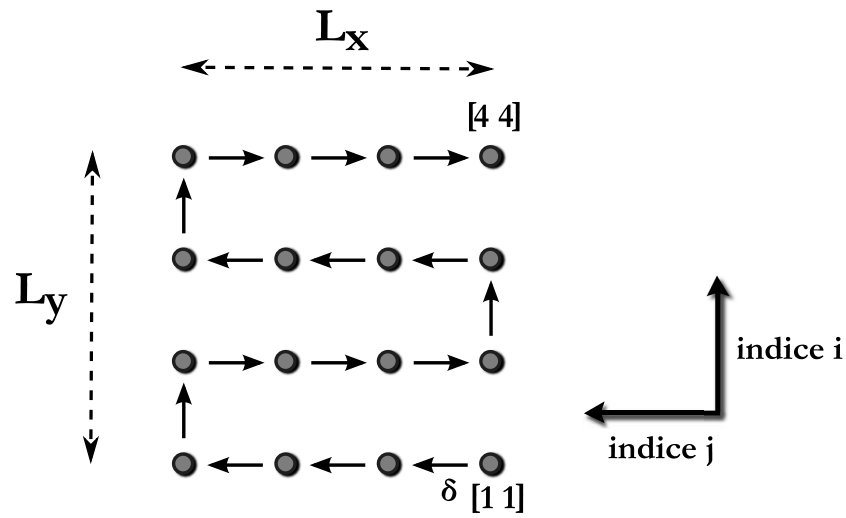


FIGURE I.30 – Principe d'indexage des grilles de mesure. Chaque point de mesure, noté par un disque, est séparé de son voisin d'une distance égale à la résolution spatiale δ .

Une fois l'expérience terminée, on a à notre disposition toute la dynamique du champ de déplacement normal de la plaque. Il nous est donc possible de retracer l'évolution temporelle des ondes acoustiques, comme l'illustre la figure I.31 dans le cas de la propagation dans une plaque rectangulaire aux bords libres.

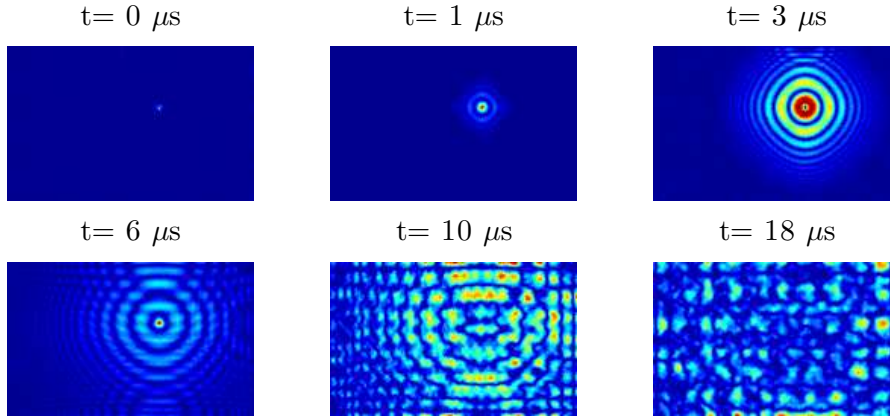


FIGURE I.31 – Exemple de l'évolution temporelle du champ de déplacement normal dans une plaque rectangulaire.

I.4.1.4 Acquisition et traitement des données

L'acquisition des données et le pilotage de l'expérience sont réalisées par un oscilloscope numérique (modèle Wavesurfer 42 Xs de Lecroy) qui dispose d'un PC embarqué. Les divers instruments du dispositif expérimental communiquent par bus GPIB^p. Le signal analogique fourni par la sonde est numérisé sur 8 bits en échelle verticale avec un taux d'échantillonnage maximal de 2.5 milliards d'échantillons par seconde et une bande passante de 400 MHz. L'oscilloscope offre la possibilité d'optimiser le rapport signal/bruit de nos mesures par plusieurs moyens : en réalisant une moyenne arithmétique sur plusieurs impulsions, en optimisant la bande passante autour de nos fréquences d'études et en proposant des filtres passes-bas de bruit haute fréquence.

Les programmes de pilotage des expériences et tout le traitement qui suit ont été développés avec le logiciel Matlab. Afin de disposer du maximum de résolution verticale de l'oscilloscope, on effectue en tout point du balayage expérimental une mise en pleine échelle pour compenser les fortes variations du signal entre la zone de la source et ailleurs dans l'échantillon. On gagne ainsi en dynamique de signal.

p. le GPIB (general purpose information/interface bus ou IEEE 488) est un standard universellement utilisé pour interconnecter des instruments de mesure électronique

Au delà de la dynamique du champ acoustique, on veut pouvoir étudier les modes propres du système. Pour ce faire, on réalise une transformée de Fourier grâce à l'algorithme FFT de Matlab. Un exemple de spectre d'un signal temporel est présenté dans la figure I.32. Chaque pic du spectre correspond alors à un mode propre du système (ou quasi-mode si le milieu n'est pas fermé). En chacun de ces pics, il est possible de représenter la distribution spatiale du module et de la phase du mode correspondant en réalisant la transformée de Fourier de chacun des signaux temporels stockés par l'expérience. Un exemple est montré dans la figure I.33.

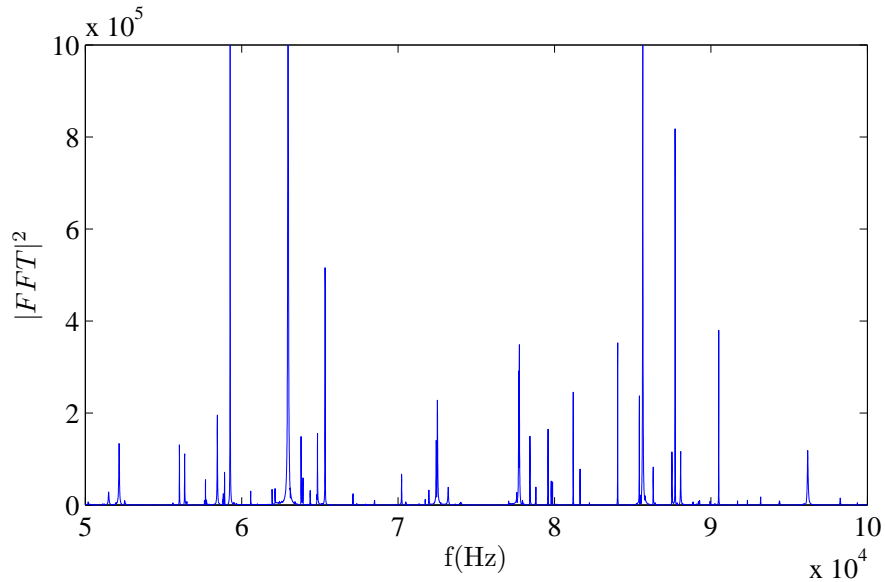


FIGURE I.32 – Exemple de spectre de puissance réalisé en un point entre 50 et 100 kHz.

Compte tenu de la très grande taille des données expérimentales, il est nécessaire d'effectuer ces calculs par portions de points (temporels ou fréquentiels suivant si on s'intéresse à la dynamique ou aux modes propres) et/ou sur une zone spatiale réduite, ce qui ajoute à la durée de l'expérience une composante importante liée au post-traitement numérique.

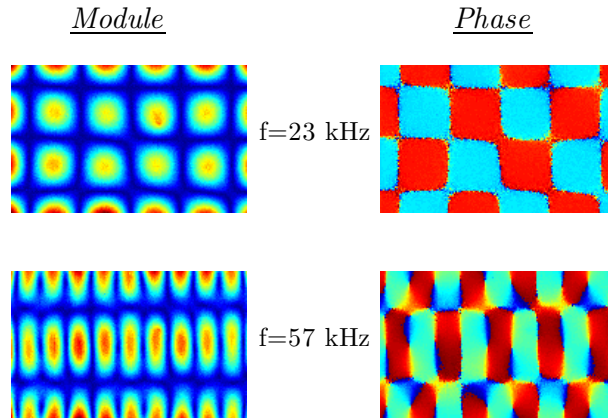


FIGURE I.33 – Exemple de distribution spatiale du module et de la phase des modes (5,3) et (10,2) d'un wafer rectangulaire aux bords libres.

I.4.1.5 Contrôle des pertes

La décroissance du signal temporel présenté dans la figure I.28 s'explique par les processus physiques suivants :

- l'atténuation interne du matériau, de type visco-élastique
- le rayonnement dans l'air
- le couplage avec les supports

Le premier étant intrinsèque au matériau, nous ne pouvons jouer expérimentalement que sur les deux derniers.

Pour minimiser le couplage et les possibles fuites par les supports, nous avons opté pour des supports de forme conique en laiton (cf. figure I.34). La surface de contact entre la pointe des supports et l'échantillon est très faible, ainsi que la masse des échantillons (qui vaut au maximum 30 g), nous pouvons donc négliger l'influence des supports sur la propagation des ondes acoustiques dans nos plaques de silicium. Ceci se confirme expérimentalement par l'absence de perturbation au niveau des supports.

Généralement les échantillons reposent sur trois pointes mais dans le cas où l'excitation se fait par le transducteur de contact, la pointe fine de silice collée sur ce dernier joue le rôle de support en plus de deux cônes. Le transducteur est alors monté sur une platine de translation compacte verticale qui permet d'approcher précisément l'échantillon.



FIGURE I.34 – Illustration des supports coniques sur lesquels l'échantillon est posé.

I.4.1.5.1 Contrôle global du couplage avec l'air

Pour diminuer le rayonnement des ondes de plaque dans l'air, nous avons conçu une cavité à vide dans laquelle il est possible de réaliser un vide primaire en pompant l'air qui environne l'échantillon. La cavité est constituée de deux plaques de verre acrylique transparentes posées sur des joints toriques et vissées de part et d'autre d'un anneau de dural (cf. figure I.35).

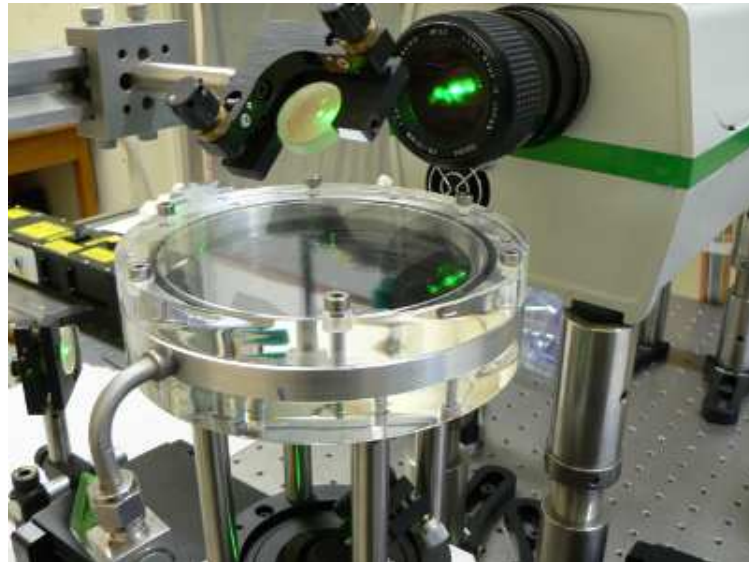


FIGURE I.35 – Photographie du dispositif à vide permettant de réduire le rayonnement des ondes élastiques dans l'air.

Sur la plaque inférieure, un hublot de quartz permet au faisceau pompe d'atteindre la surface inférieure de l'échantillon sans détériorer la plaque d'acrylique (le seuil d'ablation du quartz est nettement supérieur à celui de l'acrylique). Bien que transparente, la plaque supérieure induit une diminution du rapport signal/bruit d'environ 1.5 dBm pour le signal fourni par le faisceau sonde.

La figure I.36 illustre le gain qu'apporte le dispositif à vide primaire sur la dynamique du signal. La courbe bleue représente un signal mesuré en un point d'un wafer homogène de 4" de diamètre et de 380 μm d'épaisseur, à l'air libre. Au bout d'environ 50 ms, il n'est plus possible de distinguer le signal du bruit. On considère donc que la réponse du système est terminée. En revanche, la même mesure en présence d'un vide primaire (courbe rouge) montre que le signal est comparable au niveau de bruit seulement au bout de 200 ms. On a donc gagné un facteur 4 sur la dynamique du signal.

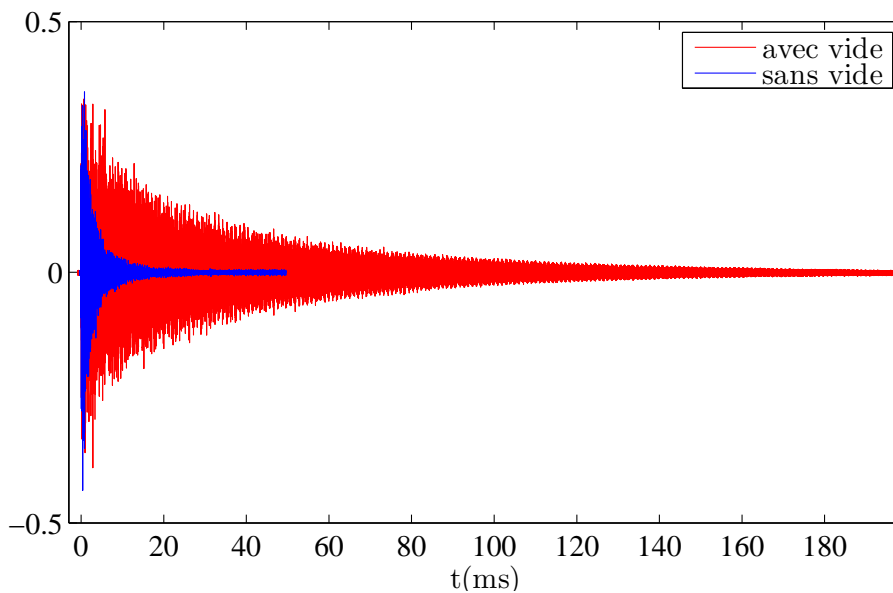


FIGURE I.36 – Comparaison d'un signal mesuré en un point avec (courbe rouge) et sans (courbe bleue) un vide primaire. Les signaux ont été moyennés sur 100 coups.

La qualité de la mesure est également renseignée par le facteur de qualité Q , qui se détermine à l'aide de la formule suivante :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \quad (\text{I.71})$$

où f_0 est la fréquence de la résonance considérée et Δf la largeur spectrale à mi-hauteur de cette dernière. En s'intéressant au spectre de puissance des courbes de la figure I.36 entre 0 et 1 MHz, les valeurs de Q oscillent entre 1.10^2 et 2.10^4 à l'air ambiant et entre 6.10^2 et 4.10^4 avec un vide primaire.

Notons que la courbe rouge correspond à un cas "idéal" dans la mesure où l'échantillon ne contient aucune hétérogénéité et qu'une moyenne sur un grand nombre de coups (100) est réalisée. En pratique, d'une part la présence de pertes locales (chapitre II) ou de diffuseurs (chapitres III et IV) augmentera la décroissance des signaux et d'autre part, le nombre de coups pour la moyenne en chaque point sera limité à 20 pour avoir des temps d'expérience raisonnables^q.

On peut ajouter au tableau I.4 présenté plus haut, l'avantage de pouvoir réaliser un vide primaire autour de l'échantillon avec le dispositif de génération optique. La configuration transducteur ne permet pas pour l'instant de bénéficier de cet atout mais on peut très bien imaginer la réalisation future d'un autre système semblable à la boîte en plexiglas adapté au montage transducteur et les câbles qui y sont rattachés.

I.4.1.5.2 Contrôle local

Il est possible d'agir localement sur les pertes du système en y collant un polymère absorbant (PDMS) de dimension et/ou de forme variables. Plus les dimensions de ce dernier seront grandes, plus l'absorption des ondes de surface sera importante. Les innombrables possibilités de fabrication et de découpe de ce polymère permettent de disposer d'une multitude de configurations d'absorption différentes (cf. les exemples illustrés par la figure I.37).

q. sur les petits échantillons, on pourra monter jusqu'à 50

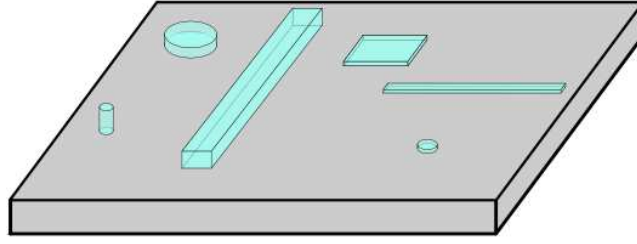


FIGURE I.37 – Schéma illustrant les diverses possibilités de tailles et de formes d'élastomère absorbant que l'on peut coller sur nos plaques de silicium.

Nous verrons dans le chapitre suivant l'utilité de pouvoir contrôler localement les pertes dans l'étude de l'ouverture progressive d'un milieu chaotique fermé. La planéité des wafers de silicium et des morceaux de PDMS permet une adhérence naturelle de ces derniers sur la surface des échantillons (à condition d'éliminer toute poussière qui pourrait nuire à l'adhérence).

I.4.2 Exemple de mesure : courbes de dispersion expérimentales

En guise d'exemple, je présente ici une expérience qui permet d'accéder rapidement aux courbes de dispersion des ondes qui se propagent dans nos plaques. Différentes méthodes de calcul des courbes de dispersion expérimentales sont présentées dans la référence [67]. Parmi elles, la méthode de la transformée de Fourier bidimensionnelle [68] présente l'avantage d'être rapide et facile à mettre en place.

Le point de départ consiste en la réalisation d'une série de mesures temporelles le long d'une direction de propagation (B-Scan). Une double transformée de Fourier de ces dernières permet de passer de l'espace (t, x) à l'espace dual (f, k) , permettant ainsi l'accès quasi-direct aux courbes de dispersion des différents modes de propagation.

Le domaine des fréquences accessibles expérimentalement dépend des paramètres de la source et de la bande passante de la sonde. Le domaine des nombres d'ondes dépend quant à lui de la résolution spatiale du B-Scan : $k_{max} = 2\pi/\Delta x$ avec une

résolution Δk qui dépend de la distance totale balayée x_{max} : $\Delta k = 2\pi/x_{max}$. Le théorème de Shannon préconise un pas d'échantillonnage spatial maximal égal à $\lambda_{min}/2$ où λ_{min} est la plus petite longueur d'onde. En pratique, un échantillonnage optimal est obtenue pour $\Delta x = \lambda_{min}/4$ [69].

Nous avons réalisé deux séries de mesures temporelles en surface d'un wafer de silicium de 4" et de 350 μm d'épaisseur : la première suivant la direction de propagation [110] (parallèle au méplat) sur une longueur d'environ 9 cm et la deuxième suivant [100] sur une longueur d'environ 8 cm. Dans les deux cas les points de mesures sont pris tous les 0.1 mm, assurant la validité de la méthode pour des longueurs d'onde supérieures à 0.4 mm, i.e pour des fréquences inférieures à environ 10 MHz, ce qui est largement suffisant dans notre cas. Pour éviter les problèmes liés aux réflexions sur les bords de l'échantillon [70], seuls les premiers instants (0 - 50 μs) des signaux temporels sont stockés.

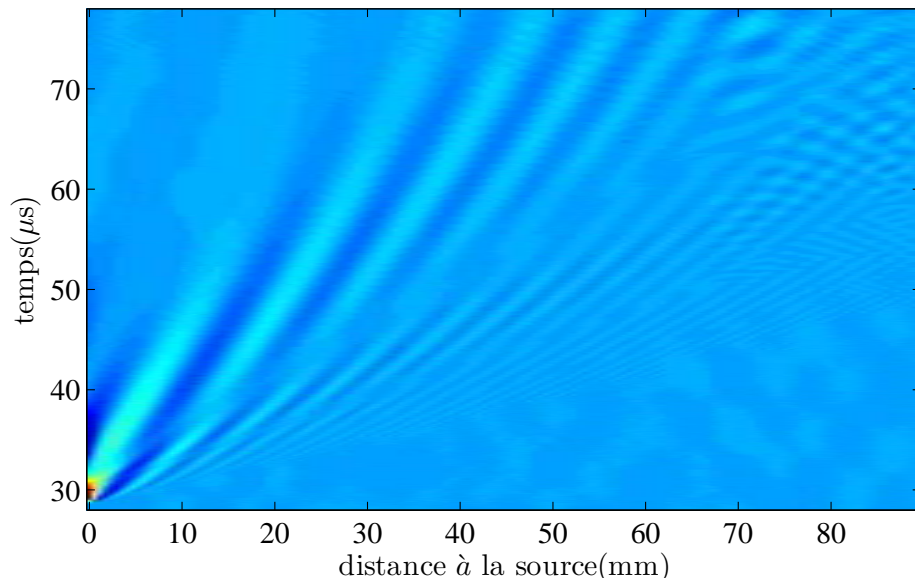


FIGURE I.38 – Champ mesuré : on stocke l'évolution temporelle du champ de vibration le long de la direction de propagation [110] (B-Scan).

L'ensemble des mesures temporelles en chacun des points de la direction [110] est illustré dans la figure I.38.

Le résultat de la transformée de Fourier bidimensionnelle est exposé dans la figure I.39. On y voit apparaître la courbe de dispersion du mode A_0 , prédominant dans nos expériences. Une détection des maxima de cette représentation permet d'en extraire la courbe de dispersion de A_0 . Les courbes de dispersion mesurées le long des directions $[110]$ et $[100]$ sont présentées dans la figure I.40 (en pointillés) et rendent compte de l'anisotropie du silicium, bien que faible dans la coupe (100).

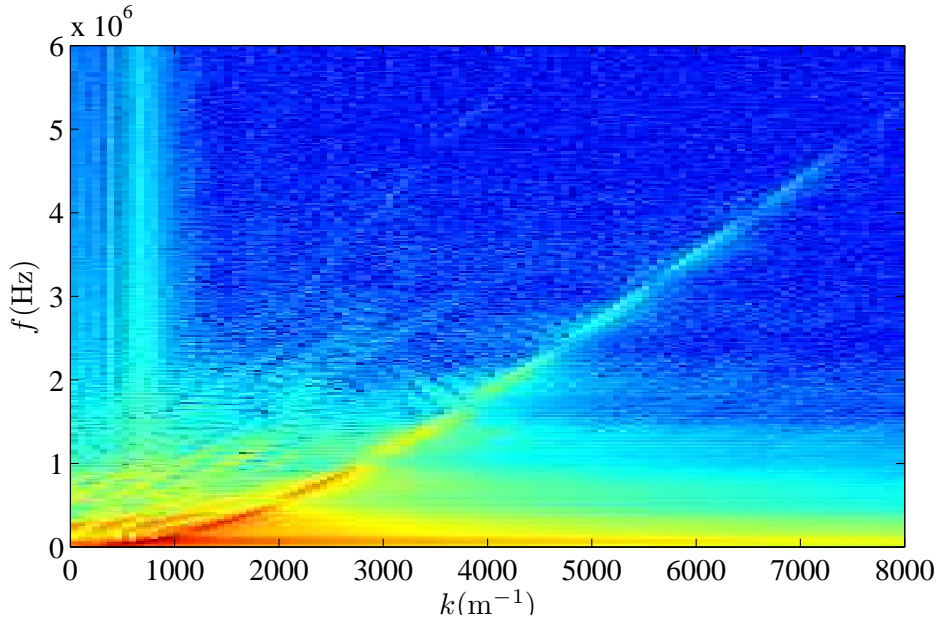


FIGURE I.39 – Transformée bidimensionnelle du B-Scan.

On réalise un fit de ces dernières par la courbe de dispersion de A_0 théorique de Rayleigh-Lamb (cf. section I.2.3.1.2) avec comme paramètres du fit les vitesses longitudinale c_L et transversales c_T . Les résultats du fit sont les suivants : pour la direction $[100]$, on trouve $c_L=8690$ m/s et $c_T=5702$ m/s qui diffèrent des valeurs théoriques présentées dans le tableau I.3 de 3% et 2% respectivement ; pour la direction $[110]$ parallèle au méplat on a $c_L=8836$ m/s et $c_T=5910$ m/s qui s'éloignent des valeurs théoriques de 3% et 1%. Bien que très satisfaisants, ces résultats peuvent être optimisés en améliorant la précision de l'alignement de la ligne de mesure avec la direction cristallographique considérée.

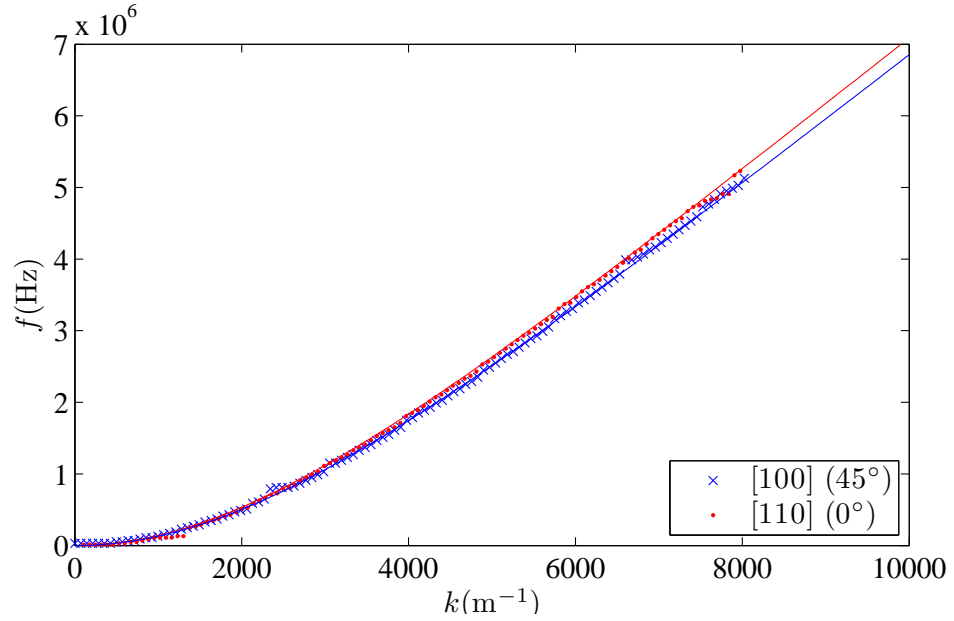


FIGURE I.40 – Fit des courbes de dispersion expérimentales de A_0 (en pointillés) avec la théorie (en trait plein) pour deux directions de propagation : $[100]$ (en bleu) et $[110]$ (en rouge).

De part sa simplicité et sa rapidité d'exécution, cette méthode constitue un outil efficace qui permet de remonter aux propriétés élastiques du matériau dans les différentes directions, ou encore d'évaluer l'épaisseur de la plaque connaissant les vitesses de propagation des ondes volumiques.

I.5 Conclusion

Nous avons présenté dans la première partie de ce chapitre la théorie des ondes qui se propagent dans les plaques minces. La résolution numérique de l'équation de Rayleigh-Lamb permet d'accéder aux courbes de dispersion de l'infinité des ondes de Lamb qui coexistent dans ces milieux. Cependant, à très basse fréquence, nous avons vu qu'en plus du mode fondamental de cisaillement horizontal SH_0 , seul deux modes fondamentaux de Lamb se propagent : le mode symétrique S_0 , semblable à une onde de compression, et le mode antisymétrique A_0 , assimilable à une onde de flexion de part sa forte composante transversale.

L'expérience d'élastodynamique que j'ai mise en place permet d'explorer l'évolution temporelle des ondes de Lamb qui se propagent dans des plaques de silicium de formes diverses. Grâce à une génération et une détection par laser, il est possible de réaliser des mesures de manière non invasive et sur une large gamme de fréquences. Outre l'information sur la dynamique du champ de déplacement, il est possible, par reconstruction numérique, d'accéder aux distributions spatiales des module et phase de chacun des modes du système sur lesquelles se décomposent les ondes. L'information apportée par la phase est essentielle puisque c'est elle qui rend les phénomènes d'interférences possibles dans les problèmes de diffusion multiple.

La versatilité de l'expérience rend possible l'étude de différents types de milieux sans changer le dispositif : nous étudierons ainsi dans le prochain chapitre l'effet de l'augmentation locale de pertes dans un milieu homogène chaotique avant de nous intéresser à la diffusion des ondes de Lamb par une hétérogénéité (chapitre III) puis une forte densité d'hétérogénéités réparties aléatoirement (chapitre IV).

Chapitre II

Pertes en milieu homogène chaotique ouvert

Sommaire

II.1	Introduction et motivations	86
II.2	Le contexte du chaos ondulatoire	87
II.3	Modèle analytique	88
II.3.1	Le formalisme du hamiltonien effectif	89
II.3.2	Nature des pertes en milieux ouverts	90
II.3.3	Effets des pertes inhomogènes dans le domaine spatial . .	90
II.3.4	Proportionnalité entre q_n et Γ_n	91
II.4	Résultats expérimentaux	93
II.4.1	Principe de l'expérience	93
II.4.2	Évolution des propriétés spectrales	96
II.4.3	"Complexité" du quasimode	97
II.4.4	Proportionnalité entre q et Γ	102
II.5	Conclusion	103

II.1 Introduction et motivations

Un système quantique fermé est entièrement défini par un ensemble discret d'énergies propres et d'états orthogonaux entre eux. Lorsque le système fermé s'ouvre progressivement vers l'extérieur par l'intermédiaire de canaux de perte, la durée de vie des modes devient finie. Par conséquent, les largeurs spectrales des modes s'élargissent et les résonances ne sont plus isolées. Les effets du couplage sur les statistiques spectrales des systèmes chaotiques ouverts ont été intensivement étudiés, que ce soit en régime de résonances isolées [71, 72], en régime de faible recouvrement spectral [73, 74] ou en régime de fort recouvrement spectral [75]. En revanche, les statistiques du champ associé aux résonances ont fait l'objet de peu d'études.

Pour des systèmes ondulatoires chaotiques dont la limite fermée est invariante par renversement du temps, les fonctions propres deviennent complexes (non réelles) par la présence de courants de perte, la composante stationnaire étant peu à peu remplacée par une composante progressive fuyant vers l'environnement extérieur [76]. L'analyse de la complexité du champ apparaît également dans d'autres domaines de la physique ondulatoire. C'est un ingrédient essentiel dans la théorie des modes laser, qui entraîne un élargissement de la largeur spectrale d'un facteur K , appelé facteur de Peterman [77]. Ce dernier a été intensivement étudié d'un point de vue statistique, notamment pour des cavités lasers de forme chaotique [78]. La complexité du champ a été également récemment abordée dans le contexte des milieux désordonnés ouverts [79] et dans les lasers aléatoires diffusifs [80]. Pour quantifier cette complexité, on utilise le paramètre de complexité q^2 défini comme le rapport des variances des parties imaginaire et réelle de la fonction propre considérée. Cette grandeur a été introduite par O. Lobkis et R. Weaver en 2000 [81] pour mesurer la complexité du champ associé aux résonances d'un bloc d'aluminium de forme chaotique. Sa mesure requiert la connaissance de la distribution spatiale de l'amplitude et de la phase du champ. Des estimations indirectes du paramètre de complexité ont été réalisées en 2005 dans le contexte des micro-ondes [82]. Mais à notre connaissance, des mesures expérimentales directes de ce paramètre pour un mode donné n'ont jamais été réalisées.

L'objectif de ce chapitre est de déterminer l'effet de l'ouverture progressive d'un milieu chaotique vers l'extérieur sur les propriétés spectrales et spatiales des modes [83]. Pour ce faire, on observera expérimentalement la propagation d'ondes de Lamb dans un wafer de silicium doublement tronqué avec différentes conditions d'absorption. Ces dernières seront réalisées en collant localement une bande d'élastomère dont on fera varier la largeur et l'épaisseur. Pour chaque configuration et pour un mode isolé, on calculera le paramètre de complexité q^2 à partir des distributions de l'amplitude et de la phase du mode ainsi que la largeur spectrale Γ de la résonance. Nous verrons que ces deux grandeurs, qui caractérisent respectivement l'influence des pertes dans le domaine spatial et spectral, sont liées par une relation de proportionnalité. Cette dernière sera confrontée à un modèle analytique basé sur le formalisme du hamiltonien effectif. Pour des raisons de clarté, la partie théorique sera décrite avant la partie expérimentale, avec au préalable un bref rappel sur les notions relatives au chaos ondulatoire.

II.2 Le contexte du chaos ondulatoire

Ce chapitre s'inscrit dans le contexte du "chaos ondulatoire" qui regroupe l'ensemble des systèmes ondulatoires dont la limite géométrique est chaotique. Lorsque la longueur d'onde est suffisamment petite face aux dimensions caractéristiques du système, la limite géométrique revient à approximer la propagation d'une onde par la propagation de rayons. Le problème peut alors être traité par l'étude de la dynamique d'une particule classique dans un système fermé à 2 dimensions, appelé "billard"^a. Alors que le problème se résout analytiquement pour les billards réguliers (intégrables), une géométrie chaotique entraîne l'absence de solution analytique. La figure II.1 illustre la différence de comportement de la trajectoire d'une particule ponctuelle dans un billard régulier et dans un billard chaotique.

Dans le cas du cercle (a), l'angle de réflexion est conservé et la trajectoire régulière de la particule laisse apparaître une zone de l'espace non explorée délimitée par une caustique. Dans le cercle tronqué (b), la brisure de symétrie entraîne une trajectoire irrégulière et l'ensemble du système est balayé par la particule. La dynamique d'un

a. par analogie avec le billard français, puisqu'il ne comporte pas de trou !

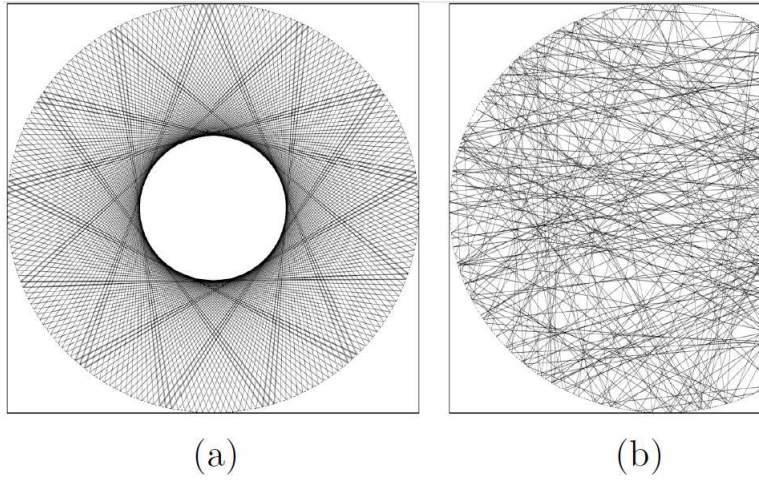


FIGURE II.1 – Évolution d’une particule classique dans un billard dont la dynamique est (a) régulière et (b) chaotique. Issu de [84].

tel système exhibe la fameuse propriété d’extrême sensibilité aux conditions initiales. Notons que cette section n’a pas pour vocation de présenter un état de l’art du chaos ondulatoire. Le lecteur désireux d’étendre ses connaissances dans le domaine pourra consulter par exemple la référence [85] qui concerne le chaos ondulatoire en acoustique et en élastodynamique. Cet article de revue s’inscrit dans la lignée des travaux réalisés depuis 1995 par l’équipe danoise du CATS (centre for Chaos And Turbulence Studies) [86–89]. Plus récemment, Wright et Weaver [90] ont publié un ouvrage sur le chaos ondulatoire et plus généralement les milieux complexes dans le domaine de l’acoustique.

II.3 Modèle analytique

Le modèle analytique à 2 niveaux présenté ici a été développé dans le cadre de la thèse de Charles Poli sur la thématique du chaos ondulatoire en milieux ouvert [91]. Nous ne présentons ici que les grandes lignes, nécessaires à une compréhension globale des concepts abordés et permettant une comparaison directe avec les résultats expérimentaux décrits plus loin. J’introduirai au préalable la notion de hamiltonien effectif.

II.3.1 Le formalisme du hamiltonien effectif

Les études sur le chaos ondulatoire se sont historiquement développées sur des systèmes fermés, décrits par un hamiltonien, donc par un opérateur hermitien dont le spectre d'énergie est réel et discret. Dans ce domaine de recherche, deux approches théoriques se sont développées : les approches semiclassiques fondées sur la théorie des orbites périodiques où l'on essaie de calculer les niveaux d'énergie à partir des orbites périodiques classiques^b, et les approches statistiques fondées sur la théorie des matrices aléatoires.

Mais un milieu réel n'est jamais "fermé", ne serait-ce que par la nécessité de le coupler au monde extérieur pour mesurer ses propriétés. Il devient alors nécessaire de traiter ces systèmes comme des systèmes ouverts. Dans le cadre de la théorie de la diffusion (au sens de "scattering"), le couplage du milieu avec l'extérieur est modélisé sous la forme de canaux fictifs de pertes, par lesquels les ondes rentrent et sortent de la zone d'interaction. L'élément de base de cette théorie est la matrice de diffusion S dont les pôles donnent accès aux propriétés statistiques des énergies propres, des largeurs, et du champ associé aux résonances [91]. Ces dernières sont reliées aux valeurs propres et aux fonctions propres d'un opérateur non-hermitien : le hamiltonien effectif \mathcal{H}_{eff} . Ce dernier s'exprime en fonction du hamiltonien du système fermé H et de la matrice de couplage V :

$$\mathcal{H}_{eff} = H - iVV^\dagger/2 \quad (\text{II.1})$$

où V^\dagger est la matrice adjointe (ou transconjugée) de V .

Les propriétés statistiques des résonances sont obtenues en considérant \mathcal{H}_{eff} comme une matrice aléatoire non-hermitienne. Le formalisme du hamiltonien effectif possède donc l'avantage de décrire les propriétés statistiques des systèmes chaotiques ouverts en y incorporant la théorie des matrices aléatoires, initialement utilisée en milieux fermés. Pour plus de détails sur le formalisme du hamiltonien effectif, j'invite le lecteur à consulter les références [92, 93].

b. les orbites périodiques sont des trajectoires se reparcourant indéfiniment après un nombre n de rebonds sur les bords du billard.

II.3.2 Nature des pertes en milieux ouverts

Comme J. Barthélémy *et. al* l'ont montré dans le cas particulier d'une cavité électromagnétique bidimensionnelle, les différents types de couplage peuvent être séparés en deux catégories [94] : les pertes homogènes et les pertes inhomogènes, i.e localisées spatialement. Tandis que les premières affectent de manière uniforme les largeurs des résonances^c, les dernières provoquent des fluctuations de largeur spectrale différentes selon la résonance considérée.

Ces différentes catégories de pertes ont un impact encore plus notable dans le domaine spatial dans la mesure où la composante spatiale du champ reste inchangée en cas de pertes homogènes alors que les pertes locales contribuent à rendre le champ complexe.

II.3.3 Effets des pertes inhomogènes dans le domaine spatial

Il est important de noter que le champ mesuré dans les expériences décrites plus loin, noté $\psi' = u + i v$, contient une phase globale arbitraire. Pour s'assurer que la partie imaginaire du champ soit uniquement due à la partie progressive, il est nécessaire d'appliquer une rotation de phase globale [95] :

$$\psi = e^{i\alpha} \psi' = e^{i\alpha} (u + i v) = \psi_R + i \psi_I \quad (\text{II.2})$$

la phase α est unique et fixée par la condition d'orthogonalité $\langle \psi_R \psi_I \rangle = 0$ qui rend les parties réelle et imaginaire indépendantes. En prenant la moyenne spatiale, notée $\langle \dots \rangle$, du carré de l'expression (II.2), et en identifiant les parties réelle et imaginaire, la phase s'exprime en fonction de $\langle u^2 \rangle, \langle v^2 \rangle$ et $\langle uv \rangle$:

$$\tan(2\alpha) = -\frac{2 \langle uv \rangle}{\langle u^2 \rangle - \langle v^2 \rangle} \quad (\text{II.3})$$

La complexité du champ permet de caractériser l'influence des pertes inhomogènes puisque ce sont elles qui rendent les fonctions propres du système complexe.

c. à condition d'être à haute fréquence [91]

Ce changement sur les propriétés spatiales du champ peut être quantifié par un paramètre unique : le paramètre de complexité q^2 , introduit dans le domaine de l'élastodynamique par Lobkis et Weaver [81]. Pour une fonction d'onde ψ donnée, son expression est la suivante :

$$q^2 = \frac{\langle \psi_I^2 \rangle}{\langle \psi_R^2 \rangle} \quad (\text{II.4})$$

où $\langle \dots \rangle$ est une moyenne spatiale. Le paramètre de complexité vaut 0 pour une cavité fermée ($\psi_I = 0$). Il vaut 1 pour un milieu complètement ouvert, ce qui correspond à une superposition aléatoire d'ondes planes.

Dans le cadre de l'hypothèse de Pnini et Shapiro [76] selon laquelle les parties réelles et imaginaires du champ d'un système sont des variables aléatoires gaussiennes^d, il existe un lien entre le paramètre de complexité q^2 et la distribution de probabilité de la phase $P(\phi)$ de la composante spatiale du champ $\psi = |\psi|e^{i\phi}$ [81] :

$$P(\phi) = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{q^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi} \quad (\text{II.5})$$

Cette distribution est piquée sur 0 et π pour le champ purement stationnaire d'un milieu fermé. L'ouverture du système vers l'extérieur provoque un élargissement de cette distribution jusqu'à devenir uniforme pour le champ purement progressif d'un milieu ouvert.

II.3.4 Proportionnalité entre q_n et Γ_n

Alors qu'un modèle à N niveaux avec $N \rightarrow \infty$ est nécessaire pour décrire les statistiques du paramètre de complexité, un modèle à 2 niveaux (présenté en détail dans le chapitre 2 de la référence [91]) est ici suffisant pour illustrer la proportionnalité entre la racine carré du paramètre de complexité q_n et la largeur spectrale^e Γ_n de la résonance d'un état n . On rappelle l'expression du hamiltonien effectif : $\mathcal{H}_{eff} = H - iVV^\dagger/2$ où le hamiltonien du système fermé H est représenté par une matrice 2×2 et $iVV^\dagger/2$ est un potentiel imaginaire décrivant le couplage avec l'extérieur par l'intermédiaire de M canaux de fuites. La matrice V de dimension $2 \times M$ contient les amplitudes de couplage V_n^c qui relient l'état n au canal c .

d. pour un système ouvert contenant des pertes inhomogènes

e. induite par les pertes inhomogènes

La non-hermiticité du hamiltonien effectif rend ses valeurs propres et vecteurs propres complexes. Les énergies propres de \mathcal{H}_{eff} s'expriment comme suit :

$$\mathcal{E}_{1,2} = \epsilon_{1,2} - \frac{i}{2}\Gamma_{1,2} \quad (\text{II.6})$$

où $\epsilon_{1,2}$ and $\Gamma_{1,2}$ sont respectivement les deux énergies propres et les deux largeurs spectrales du modèle à 2 niveaux. Dans la base diagonalisant le hamiltonien du système fermé H , le hamiltonien effectif s'écrit :

$$H_{eff} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{II.7})$$

où $E_{1,2}$ sont les énergies propres du système fermé (avec $E_2 > E_1$) et $\Gamma_{np} = \sum_{c=1}^M V_n^c V_p^c$. Notons que dans ce modèle, les éléments non diagonaux du potentiel imaginaire sont égaux : $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \sum_{j=1}^M V_1^c V_2^c$. Comme nous nous intéressons au régime de faible recouvrement modal, le potentiel imaginaire peut être vu comme une perturbation de la partie hermitienne et \mathcal{H}_{eff} (II.7) peut être facilement diagonalisée en appliquant la théorie des perturbations au premier ordre. Les énergies propres et les largeurs spectrales se déduisent directement : $\epsilon_{1,2} = E_{1,2}$ et $\Gamma_{1,2} = \sum_{c=1}^M (V_{1,2}^c)^2$. Dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ des vecteurs propres de H , les vecteurs propres "perturbés" de \mathcal{H}_{eff} s'écrivent :

$$|\psi_1\rangle = |1\rangle - \frac{i}{2} \frac{\Gamma_{21}}{E_2 - E_1} |2\rangle, \quad (\text{II.8})$$

$$|\psi_2\rangle = |2\rangle + \frac{i}{2} \frac{\Gamma_{12}}{E_2 - E_1} |1\rangle. \quad (\text{II.9})$$

Le paramètre de complexité q_n^2 dans le modèle à 2 niveaux se déduit de (II.4) :

$$q^2 = \frac{\Gamma_{21}^2}{4(E_2 - E_1)^2} \quad (\text{II.10})$$

Une augmentation uniforme des pertes inhomogènes modifie, par définition, chaque élément de couplage de la même manière : $V_i^c \rightarrow \sqrt{v}V_i^c$, où le scalaire v caractérise l'augmentation des pertes.

Par conséquent, la largeur spectrale et le paramètre de complexité dépendent de v de la manière suivante :

$$\Gamma_n(v) = v \sum_c (V_n^c)^2 \quad \text{and} \quad q^2(v) = v^2 \frac{(\sum_c V_1^c V_2^c)^2}{4(E_2 - E_1)^2} \quad (\text{II.11})$$

impliquant une relation de proportionnalité entre Γ et q pour un mode donné :

$$q_n = \frac{\sqrt{(\sum_c V_1^c V_2^c)^2}}{\sum_c (V_n^c)^2} \frac{\Gamma_n}{2(E_2 - E_1)} . \quad (\text{II.12})$$

Cette relation peut se mettre sous la forme générale :

$$q_n = \beta_n \Gamma_n \quad (\text{II.13})$$

où le coefficient de proportionnalité β_n , propre à chaque résonance, dépend des amplitudes de couplage et du spectre du système fermé [96]. Dans la limite d'un très grand nombre de canaux faiblement couplés ($M \rightarrow \infty$, $\sigma^2 \rightarrow 0^f$ et $\langle \Gamma \rangle = M\sigma^2$ fixé) le terme qui dépend des amplitudes de couplage est proportionnel^g à $1/\sqrt{M}$, de sorte à ce que les fluctuations de β_n soient seulement dues au spectre. Dans la suite on s'intéressera seulement à la proportionnalité entre q_n et Γ_n en étudiant expérimentalement une plaque de silicium de forme chaotique.

II.4 Résultats expérimentaux

L'expérience décrite dans la partie suivante utilise le dispositif laser/ultrasons de l'outil expérimental d'ondes de surface présenté dans le premier chapitre de ce manuscrit. En contrôlant de manière progressive le taux de pertes inhomogènes, on trouve une relation de proportionnalité entre q et Γ pour un mode donné, en accord avec les prédictions théoriques décrites précédemment.

II.4.1 Principe de l'expérience

Le système étudié est illustré dans la figure II.2. Il s'agit d'un wafer de silicium de 2 pouces de diamètre et de 380 μm d'épaisseur. Une première coupe est réalisé

f. σ^2 correspond à la variance des amplitudes de couplage, directement liée à la force de couplage pour un canal entre le système et l'extérieur.

g. comme cela est indiqué dans la référence [97]

à $R/2$ pour obtenir un cercle tronqué, assurant ainsi une dynamique chaotique de la particule qui se meut dans le billard classique associé [98]. Cette forme chaotique assure l'ergodicité des modes contrairement à ceux que l'on trouve dans les cavités intégrables et qui présentent des motifs réguliers. Les statistiques modales dans un tel système sont essentiellement gaussiennes, avec un phénomène de répulsion entre deux fréquences propres voisines [99]. Une autre coupe perpendiculaire à la première est réalisée à $\sqrt{3}R/2$ pour briser la symétrie restante.

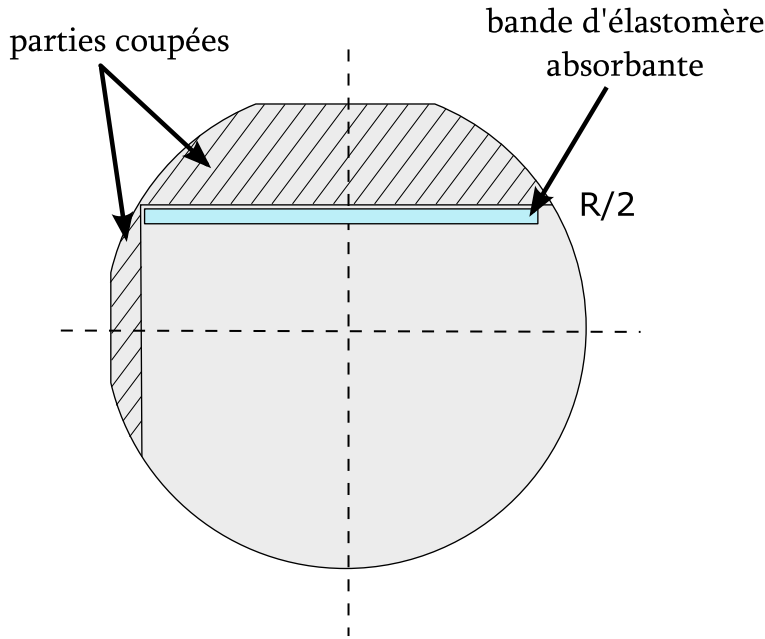


FIGURE II.2 – Wafer de silicium de 2 pouces de forme chaotique. Les zones hachurées indiquent les deux troncatures qui ont été réalisées à partir du wafer initial. La bande bleue indique la position de la bande d'élastomère absorbante décrite plus loin.

On rappelle que l'échantillon est disposé à l'horizontale sur trois supports coniques dont l'influence est négligeable. Les ondes acoustiques sont générées par effet thermoélastique sur la face inférieure du wafer à l'aide du laser Nd :YAG pulsé décrit dans le chapitre I qui fournit des impulsions d'environ 8 ns avec un taux de répétition de 20 Hz. De l'autre côté de l'échantillon, la sonde laser interférométrique hétérodyne récupère la dynamique temporelle du champ de déplacement normal sur une bande passante de [20 kHz - 4 MHz]. La durée de stockage des signaux est de 20 ms avec une résolution temporelle de 40 ns. La génération thermoélastique,

moins efficace qu'avec le transducteur de contact, nécessite de moyenner chaque signal temporel sur 100 réalisations pour optimiser le rapport signal/bruit. La totalité du champ du système est récupérée en déplaçant l'échantillon avec les deux platines de translation XY. Ce déplacement est réalisé avec une résolution spatiale de $500\ \mu\text{m}$ menant à des durées d'expérience d'environ 1 jour.

La figure II.3 présente les premiers instants de la dynamique temporelle reconstituée après une expérience sur un wafer de silicium chaotique. Une distribution spatiale de type "speckle" est rapidement atteinte du fait la géométrie chaotique du wafer doublement tronqué.

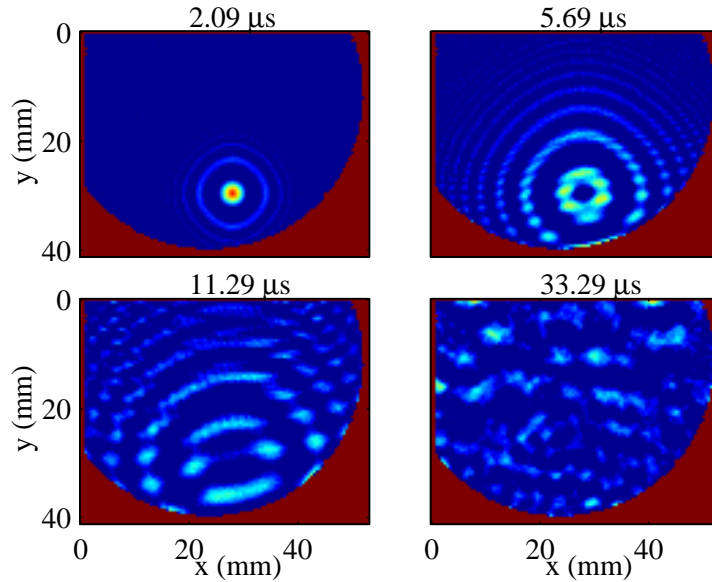


FIGURE II.3 – Premiers instants de la dynamique temporelle du champ de déplacement normal dans un wafer de silicium doublement tronqué.

L'ouverture du milieu vers l'extérieur est réalisée en collant sur un bord du wafer (cf. figure II.2) une bande d'élastomère absorbante, identique à celles décrites dans le chapitre précédent. L'absorbant utilisé est un élastomère en PolyDiMethylSiloxane (PDMS), (Dow Coring, Sylgard 184). Un mélange 10 :1 en PMDS est préparé, dégazé puis mis à l'étuve à 80°C pour réticulation pendant 2 heures. Une lame de bistouri est ensuite utilisée pour le découper à la forme et à la taille voulues. L'épaisseur d'absorbant dépend par ailleurs du volume du mélange que l'on met dans la boîte de pétri.

Différentes conditions d'absorption sont obtenues en faisant varier l'épaisseur ou la largeur de la bande d'élastomère tout en conservant sa longueur, pour que le nombre de canaux de pertes^h reste le même dans chaque cas expérimental. Notons que le degré d'absorption de chaque bande n'est pas totalement contrôlé et dépend par exemple de la manière dont la bande est collée sur le waferⁱ. Néanmoins, les paramètres qui nous intéressent étant mesurés pour une absorption donnée, la valeur précise de cette dernière importe peu.

Nous avons au total effectué une série 5 configurations d'absorption avec des bandes de PDMS de longueur fixée à 45 mm et d'épaisseur et de largeur variables :

- la première sans bande absorbante, qui constitue le cas référence,
- la deuxième avec une bande épaisse de 1 mm et large de 1 mm,
- la troisième avec une bande épaisse de 2 mm et large de 1 mm,
- la quatrième avec une bande épaisse de 2 mm et large de 2 mm,
- la dernière avec une bande épaisse de 2 mm et large de 3 mm.

On obtient ainsi 5 configurations expérimentales avec une augmentation progressive des fuites locales vers l'extérieur. Les résultats qui suivent présentent l'effet de l'augmentation du couplage sur les propriétés spectrales et spatiales d'une résonance isolée.

II.4.2 Évolution des propriétés spectrales

Après avoir identifié une résonance bien isolée autour de 47 kHz, nous nous sommes intéressés à l'évolution de la largeur de cette résonance pour les 5 configurations expérimentales décrites plus haut. Le résultat est présenté dans la figure II.4. En plus de la diminution triviale de l'amplitude de la résonance alors que l'absorption augmente, on voit que l'augmentation des pertes provoque un élargissement de la largeur spectrale, correspondant à une diminution du temps de vie du quasimode. On observe en outre un décalage de la position de la résonance vers les basses fréquences. Pour expliquer ce dernier, on peut considérer que la présence d'absorbants de plus en plus gros contribue à agrandir en quelque sorte la cavité. La

h. ce dernier est proportionnel à la longueur de la bande sur la demi-longueur d'onde du mode considéré [91]

i. on rappelle que la planéité des wafers de silicium et des morceaux de PDMS permet une adhérence naturelle de ces derniers sur la surface des échantillons

longueur d'onde résultante se retrouve alors augmentée, impliquant une diminution de la fréquence de résonance.

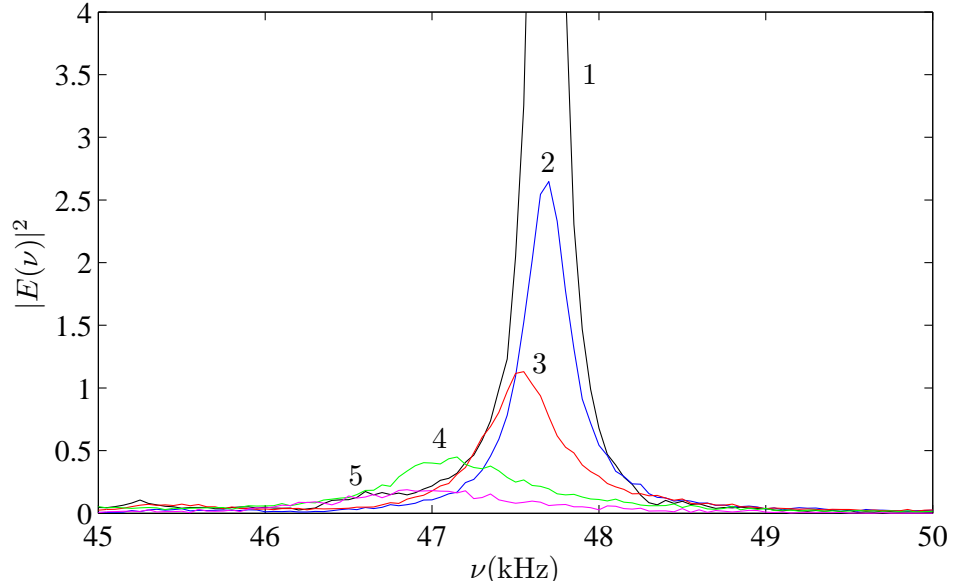


FIGURE II.4 – Évolution de la largeur spectrale de la résonance considérée pour les 5 configurations d'absorption. Les chiffres de 1 à 5 indiquent les différentes expériences par ordre d'absorption croissante.

II.4.3 "Complexité" du quasimode

La figure II.6 présente l'évolution des distributions spatiales des parties réelles et imaginaires du quasimode considéré pour les différentes expériences. Ces cartographies sont obtenues à partir de la transformée de Fourier de chaque signal temporel stocké au cours de l'expérience. Pour une absorption croissante, on observe une diminution de la partie réelle alors que le poids de la partie imaginaire augmente, due à l'augmentation des courants de fuite. L'accroissement des pertes induit également une déformation progressive de la distribution spatiale du champ complexe.

Les distributions du champ complexe permettent d'autre part de valider l'hypothèse de Pnini et Shapiro selon laquelle les parties réelle et imaginaire sont des variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle, comme en témoigne la figure II.5.

Elle présente les distributions expérimentales des parties réelle et imaginaire normalisées du quasimode dans le cas sans absorption. Les histogrammes expérimentaux sont en très bon accord avec une évolution gaussienne $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \exp(-x^2/2\sigma^2)$, représentée en trait plein^j. On observe le même comportement pour les quatre autres expériences.

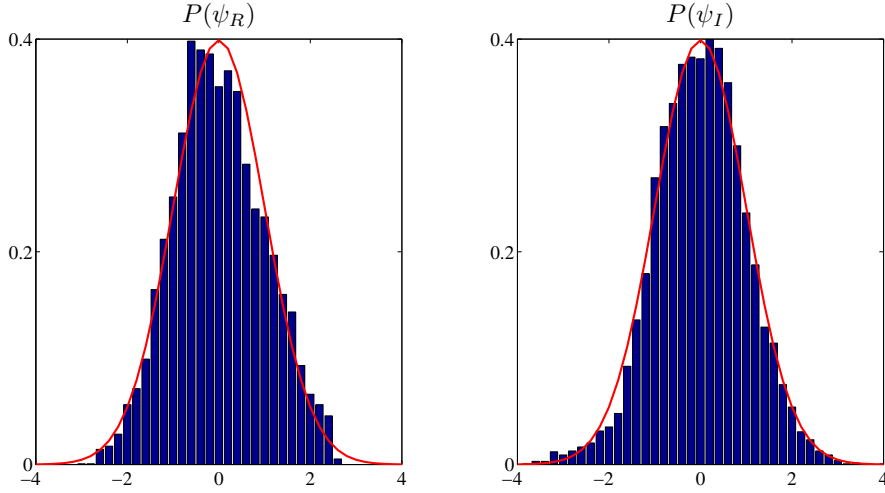


FIGURE II.5 – Distributions des parties réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) mesurées expérimentalement pour le quasimode à 47 kHz dans l'expérience (1). La courbe en trait plein rouge correspond à l'évolution gaussienne théorique.

j. la normalisation des parties réelles et imaginaires entraîne $\sigma^2 = 1$

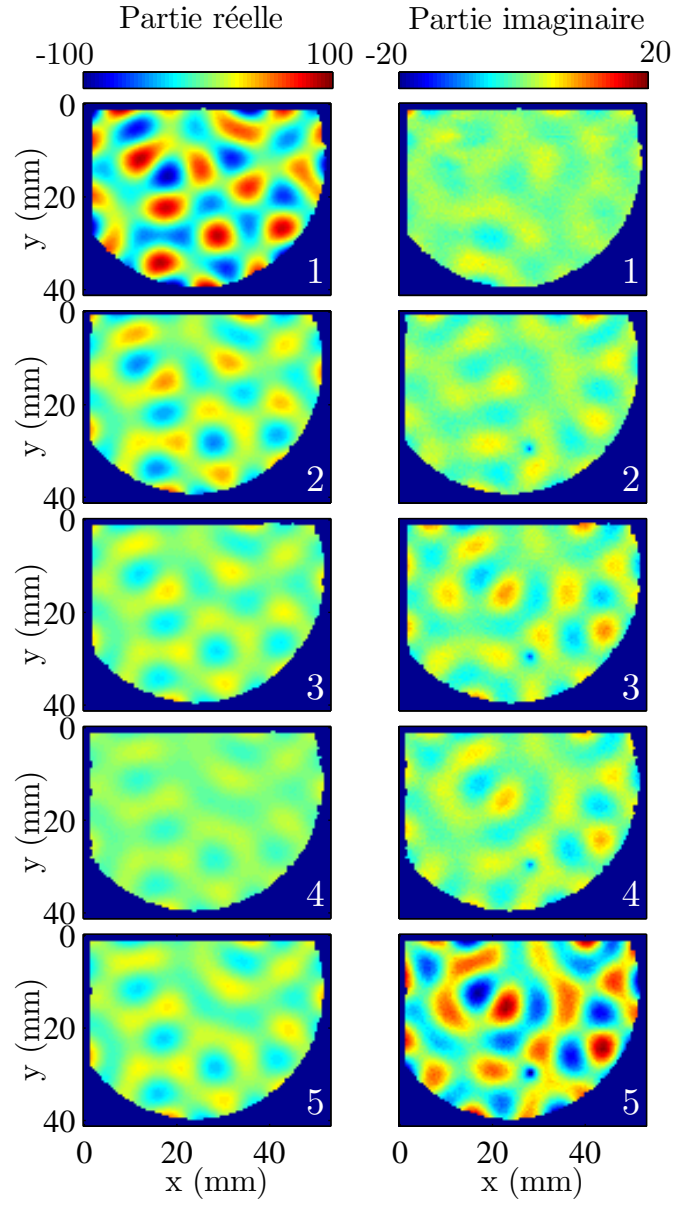


FIGURE II.6 – Cartographies des parties réelles (colonne de gauche) et imaginaires (colonne de droite) du quasimode considéré pour les 5 configurations d’absorption croissante (de 1 à 5). Notons la différence d’échelle de couleur pour les parties réelle et imaginaire; les fluctuations de la partie réelle de chaque configuration restent supérieures à celles de la partie imaginaire.

Le calcul du paramètre de complexité nécessite une statistique gaussienne du quasimode, ce qui exclut les modes de type "scar" pour lesquels l'onde vient se concentrer sur une orbite périodique instable de la cavité (cf. un exemple de mode scar mesuré dans la figure II.7). Pour le quasimode étudié jusqu'ici, on calcule la valeur du paramètre de complexité q^2 en réalisant les moyennes spatiales des cartes du champ complexe obtenues expérimentalement dans chaque cas d'absorption.

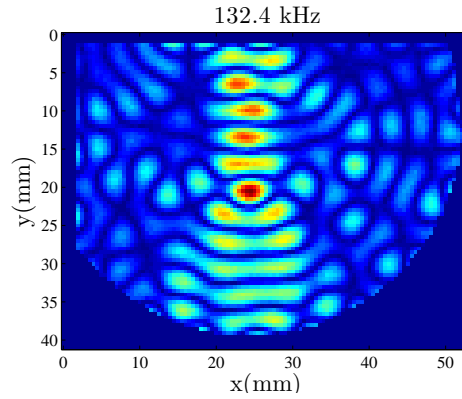


FIGURE II.7 – Exemple d'un mode de type "scar" qui brise l'ergodicité des modes de type "speckle".

On rappelle que pour rendre les parties réelle et imaginaire indépendantes, on effectue une rotation de la phase du champ mesuré qui associe ainsi exclusivement la partie imaginaire du quasimode aux pertes locales. Les distributions de probabilité de la phase $P(\phi)$ mesurées dans chaque cas d'absorption sont présentées dans la figure II.8. Alors que le cas sans absorption s'apparente au comportement d'un champ stationnaire d'un milieu fermé dont les valeurs de la phase sont piquées à 0 et π , on remarque au fur et à mesure que le couplage vers l'extérieur augmente un étalement des valeurs de la phase, correspondant à l'augmentation de la composante progressive du champ. La courbe en rouge correspond aux valeurs obtenues par la relation théorique (II.5) liant $P(\phi)$ au paramètre de complexité q^2 . Un excellent accord est observé.

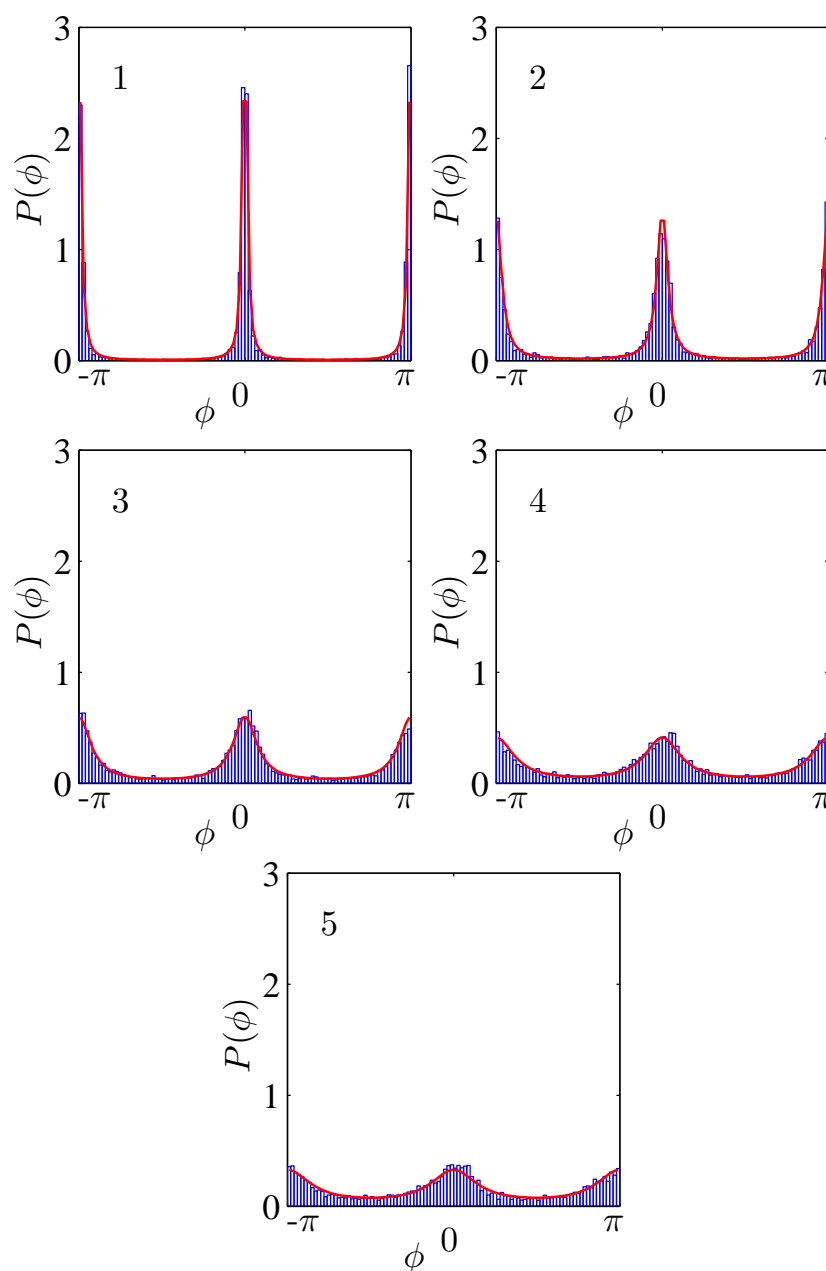


FIGURE II.8 – Distributions de probabilité de la phase pour les cinq cas de couplage vers l'extérieur. La courbe en trait plein, déduite des valeurs expérimentales de q^2 , correspond à la relation (II.5).

II.4.4 Proportionnalité entre q et Γ

Les largeurs des résonances sont obtenues en ajustant le spectre complexe avec une fonction lorentzienne complexe $L(\omega) = C/(\omega - \omega_0 + 2i\pi\Gamma)$, où ω_0 , la fréquence centrale, Γ , la largeur spectrale totale et la constante C sont les paramètres d'ajustement. La figure II.9 illustre la relation de proportionnalité entre q et Γ pour le quasi-mode autour de 47 kHz. La déviation de l'ajustement linéaire $q = 5.54 \times 10^{-4} - 0.04\Gamma$ est en dessous de 3%. Notons que la valeur non nulle de la largeur pour $q=0$ ($\Gamma=70.5\text{Hz}$) correspond à la contribution homogène des pertes qui résulte du couplage de la plaque avec l'air. Nous nous sommes ici concentrés sur une seule résonance mais à chaque résonance correspond un facteur de proportionnalité β différent dont la valeur dépend des fluctuations des éléments de couplage et du spectre.

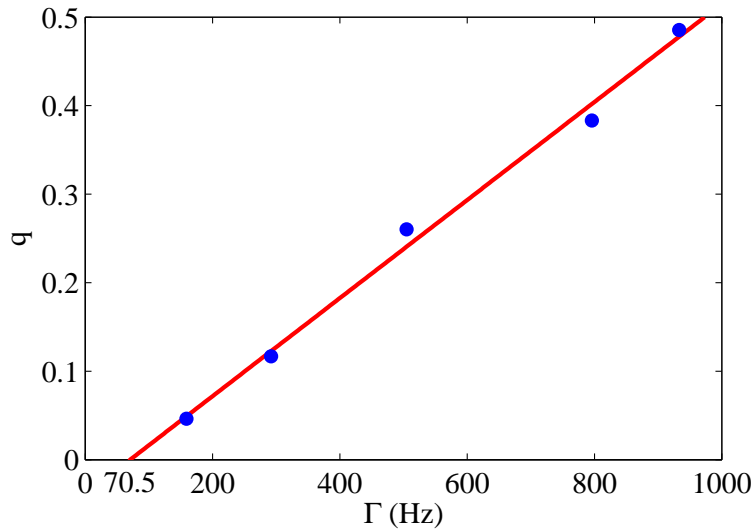


FIGURE II.9 – Évolution de la racine carrée du paramètre de complexité q en fonction de la largeur de la résonance autour de 47 kHz pour les cinq configurations expérimentales d'absorption. Les points correspondent aux données expérimentales et la droite en trait plein à l'ajustement linéaire réalisé.

II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on s'est intéressé à l'influence des pertes inhomogènes dans un milieu chaotique ouvert sur les propriétés spectrales et spatiales des fonctions d'onde du système. Après une première partie introduisant les prédictions théoriques basées sur le formalisme du hamiltonien effectif, on a présenté une série d'expériences d'élastodynamique en milieu chaotique ouvert. Plus précisément, on a observé par une méthode de mesure non invasive le comportement des ondes de Lamb dans un wafer de silicium doublement tronqué et dont on a fait varier le taux de pertes locales. En collant une bande d'élastomère de taille variable, on a obtenu une série de 5 expériences correspondant à des configurations d'absorption croissante. Pour une résonance isolée, on a observé d'une part un élargissement de la largeur spectrale mais également une augmentation du poids de la partie imaginaire, liée aux courants de fuite, au fur et à mesure que le système se couple à l'environnement extérieur.

On a caractérisé la complexité de la distribution spatiale du champ en terme de distribution de probabilité de la phase du champ mesuré $P(\phi)$ et de paramètre de complexité q^2 . Les résultats expérimentaux ont permis de révéler la relation de proportionnalité entre deux grandeurs qui n'avaient à priori rien à voir : q et la largeur spectrale Γ . Ceci est en accord avec le modèle analytique à 2 niveaux présenté dans la première partie du chapitre. La théorie prévoit également que le facteur de proportionnalité entre ces deux quantités dépende du nombre de canaux de pertes M . A notre connaissance, c'est la première fois qu'une mesure directe du paramètre de complexité q^2 est réalisée pour un quasimode donné.

Les perspectives de cette étude s'étendent à une étude systématique sur un grand nombre de quasimodes, bien qu'elle soit limitée par un faible nombre de résonances isolées. Cette dernière devrait permettre une exploration statistique des propriétés spatiale et spectrale des fonctions d'onde et vérifier la dépendance sur le nombre de canaux des coefficients de proportionnalité.

Chapitre III

Diffusion des ondes de plaque par un trou borgne

Sommaire

III.1 Introduction et motivations	107
III.2 État de l'art	107
III.3 Géométrie du problème	111
III.4 Résonances du trou : approche simplifiée	112
III.5 Modèles simplifiés de la théorie des plaques	115
III.5.1 Mouvements dans le plan : ondes S_0 et SH_0	115
III.5.2 Mouvements de flexion : onde A_0	117
III.5.2.1 Modèle de Kirchhoff	119
III.5.2.2 Modèle de Mindlin	121
III.6 Modèle de diffusion de Poisson-Kirchhoff	123
III.6.1 Développement des grandeurs en séries de Bessel	124
III.6.2 Conditions de continuité et de couplage au bord du diffuseur	126
III.6.3 Evaluation de la section efficace de diffusion	129
III.6.4 Dépendances géométriques de la section efficace de diffusion	132
III.7 Expériences et résultats	138
III.7.1 Échantillon à forte densité modale	138
III.7.2 Échantillon à faible densité modale	148

III.7.2.1	Fabrication de l'échantillon et protocole expérimental	148
III.7.2.2	Identification des modes et comparaison avec les modèles théoriques	150
III.7.2.3	Levées de dégénérescence des modes	156
III.7.2.4	Phénomène de piégeage de résonances	158
III.7.2.5	Modes chaotiques	160
III.7.3	Résolution numérique par FDTD	161
III.7.3.1	Principe de la méthode utilisée	161
III.7.3.2	Conditions de simulation	163
III.7.3.3	Résultats et comparaison avec les expériences . .	164
III.7.3.3.1	Étude dynamique	165
III.7.3.3.2	Étude modale	165
III.8	Conclusion et perspectives	169

III.1 Introduction et motivations

Le choix du diffuseur acoustique est dicté par la motivation initiale d'observer et d'étudier le phénomène de localisation d'Anderson pour les ondes de plaque en milieu désordonné (ce point sera développé dans le chapitre suivant). Pour être dans ces régimes extrêmes de diffusion multiple et espérer piéger spatialement l'onde par le désordre, les diffuseurs doivent disposer d'un fort pouvoir diffusant. On cherche donc un effet analogue à la théorie de Mie en électromagnétisme qui prévoit une exaltation de la diffusion autour des résonances internes^a d'un diffuseur diélectrique.

Parmi les différentes configurations possibles, le cas du trou circulaire non traversant (ou trou "borgne") a particulièrement retenu notre attention : comme nous le verrons dans l'état de l'art décrit dans la section suivante et tout au long de ce chapitre, cet élément présente l'avantage d'être résonant à des fréquences qui dépendent de son rayon et de l'épaisseur restante dans le fond du trou, par opposition au trou perçant qui est non résonant.

L'intérêt de ce chapitre est de comprendre et de mettre en exergue les propriétés remarquables du trou borgne. La première partie traitera des principaux modèles théoriques existants pour décrire le comportement d'un tel élément. Nous confronterons ensuite ces modèles à des expériences de diffusion d'ondes de flexion par un trou borgne que nous comparerons à un calcul numérique réalisé par la méthode des différences finies dans le domaine temporel (communément appelée par son acronyme anglais FDTD).

III.2 État de l'art

De nombreux ouvrages traitent de la diffusion des ondes de Lamb par des hétérogénéités, avec des applications essentiellement tournées vers l'évaluation et le contrôle non destructifs des matériaux. Ces ondes guidées par les surfaces de la plaque présentent l'avantage de se propager avec peu de dissipation, permettant ainsi une inspection de la totalité de l'épaisseur de la plaque sur de longues distances (de quelques centimètres à quelques dizaines de mètres selon la nature du milieu). Néanmoins, il faut faire face à la complexité d'une description exacte du

a. appelées résonances de Mie

problème de diffusion de ces ondes. Outre le caractère dispersif des modes de Lamb, la difficulté majeure rencontrée provient du grand nombre de modes guidés par la plaque et des phénomènes complexes de conversion qui peuvent se produire lors de la diffusion par un défaut ou après réflexion en bord de plaque.

Pao et Chao [100] font partis des premiers à avoir résolu analytiquement le problème de diffusion du mode antisymétrique fondamental A_0 (qu'on assimile à basse fréquence à une onde de flexion) par un trou circulaire dans une plaque infinie à l'aide de la théorie des plaques d'ordre supérieur de Mindlin [101, 102]. Depuis, de nombreuses études analytiques, numériques et expérimentales ont été mises en œuvre pour décrire la diffusion d'ondes de Lamb par tout type de défaut. Elles concernent principalement la diffusion des deux modes fondamentaux de Lamb S_0 et A_0 .

McKeon et Hinders [103] ont étudié théoriquement l'interaction du mode symétrique fondamental S_0 avec un trou circulaire en utilisant la théorie des plaques de Kane-Mindlin. Paskaramoorthy *et al.* [104] ont utilisé quant à eux une méthode hybride en combinant la théorie de Mindlin et la méthode des éléments finis pour décrire la diffusion d'ondes de flexion par des cavités de forme arbitraire et des fissures débouchantes. La diffusion d'ondes de flexion par des diffuseurs de forme arbitraire a également été étudiée plus récemment par Matus et Emets [105] qui ont fait appel à la méthode numérique de la matrice de transfert (voir par exemple [69]).

Dans ses travaux de thèse, E. Le Clézio [12] aborde les problèmes de diffusion des ondes de Lamb par des fissures verticales dans des plaques de dimensions finies. La méthode de décomposition modale^b est utilisée puis doublement validée par une modélisation par éléments finis et une série d'expériences. Il considère en particulier les conversions qui peuvent exister aux réflexions sur les bords biseautés de la plaque. Benmeddour *et al.* [106] utilisent les mêmes méthodes pour décrire la diffusion de A_0 et S_0 par des rainures symétriques et des brusques changements d'épaisseur.

b. la méthode de décomposition modale consiste à décomposer les champs acoustiques de vitesse et de contrainte, au niveau du défaut, sous la forme d'une superposition de champs produits par une infinité de modes propagatifs, non propagatifs ou atténués [69]

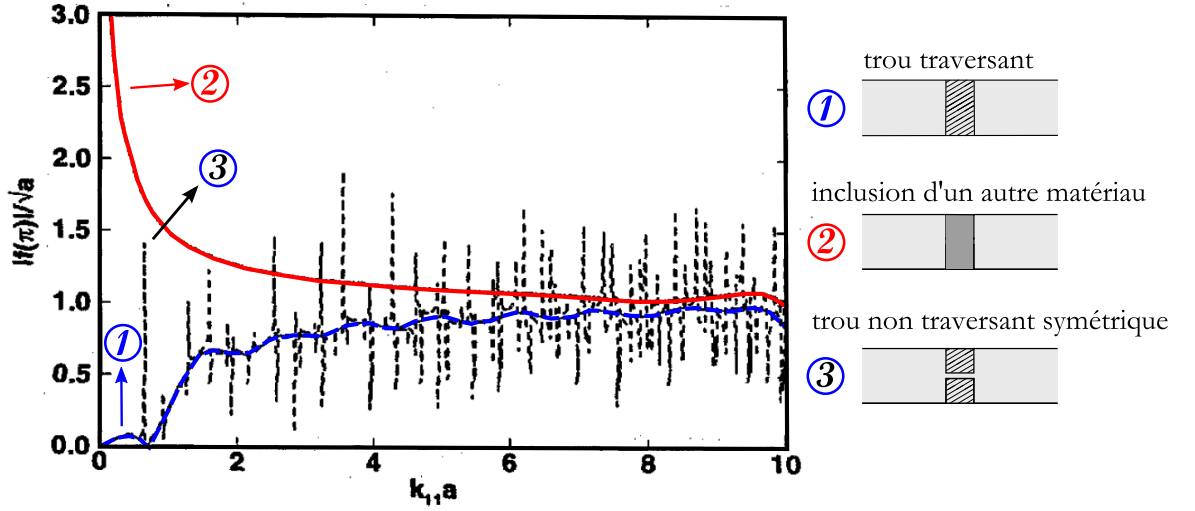


FIGURE III.1 – La figure de gauche, tirée de [107], présente l'amplitude de l'onde de flexion rétrodiffusée en champ lointain pour trois différents types d'hétérogénéités circulaires : le cas ① correspond à un trou traversant (courbe bleue), le cas ② correspond à une inclusion rigide d'un autre matériau de même épaisseur que la plaque (courbe rouge), et le cas ③ correspond à une inclusion du même matériau que la plaque mais d'épaisseur 25 fois plus petite que cette dernière (courbe bleue+noire). Pour des raisons de clarté les différents cas sont illustrés à droite de la figure.

Vemula et Norris ont développé un modèle permettant de résoudre le problème de la diffusion d'une onde de flexion par une inclusion circulaire. Dans leur premier article sur le sujet [108], les deux auteurs font appel à la théorie des plaques classique de Kirchhoff pour décrire le mouvement de flexion. Deux années plus tard [107], ils poussent l'analyse plus loin et étendent le domaine de validité de l'article précédent en considérant cette fois-ci la théorie de Mindlin plus complète. Dans les deux cas ils considèrent les deux configurations limites du trou traversant (baptisé "limite souple") et d'une hétérogénéité constituée d'un autre matériau que la plaque environnante (appelée "limite rigide"). La figure III.1 présente l'amplitude du champ rétrodiffusé en champ lointain par une inclusion circulaire pour une onde de flexion incidente d'amplitude unité. Pour des raisons de clarté et pour bien distinguer les cas, certaines courbes ont été repassées en couleur et les différentes configurations sont illustrées à la droite de la figure. Le champ acoustique rétrodiffusé dans le cas d'une inclusion rigide (②) tend vers l'infini quand la fréquence tend vers 0 alors

qu'il est nul pour un trou traversant (①). Le comportement à haute fréquence est en revanche identique pour les deux types de diffuseurs. Le cas ③ concerne une hétérogénéité circulaire de même nature que le matériau environnant mais dont l'épaisseur est 25 fois plus petite que celle de la plaque. Un tel diffuseur possède un comportement "double" qui est celui du trou traversant auquel viennent s'ajouter des fréquences discrètes piquées qui sont les fréquences propres d'une plaque circulaire au bord encastré et de même épaisseur que la matière restant au fond du trou.

Ces dernières études considèrent le cas d'hétérogénéités symétriques par rapport au plan médian de la plaque. Cette configuration idéale n'est malheureusement pas adaptée aux cas pratiques pour lesquels les défauts rencontrés sont souvent asymétriques. Dès lors que la symétrie est rompue, il peut y avoir des phénomènes de conversion entre les différentes familles de modes présents dans le milieu, même à basse fréquence. T. Grahn [109] est le premier à avoir développé un modèle analytique tridimensionnel pour décrire la diffusion de S_0 par un trou non débouchant (ou trou borgne) et non symétrique. Il valide cette théorie aux basses fréquences par l'utilisation combinée des modèles de Poisson et Kirchhoff pour décrire les différentes familles de modes qui se propagent dans de tels milieux.

Diligent [110] et Lowe [111] ont étudié le même problème en utilisant un modèle d'éléments finis tridimensionnel qu'ils ont confronté à des résultats expérimentaux. Ils considèrent le cas plus réaliste d'ondes cylindriques générées par une source circulaire ponctuelle et étudient l'influence du rayon du diffuseur sur le champ réfléchi. Ils observent en particulier des maxima d'amplitude du mode S_0 réfléchi pour des diamètres de trou multiples impairs de $\lambda/4$ et des minima pour des multiples pairs. Ces observations s'expliquent par des phénomènes d'interférences constructives ou destructives des ondes réfléchies par la partie avant et la partie arrière du diffuseur.

La diffusion du mode S_0 par un trou borgne a également été étudiée par Cegla *et al.* [112] à l'aide des modèles analytiques de Poisson et Mindlin. Ces résultats sont comparés aux autres modèles existants et confrontés à des études expérimentales.

III.3 Géométrie du problème

On considère une plaque de dimensions latérales infinies, isotrope, d'épaisseur $2h$ petite devant les longueurs d'ondes caractéristiques du problème et contenant un trou circulaire non traversant de profondeur $2(h - b)$. L'épaisseur de matière restante vaut donc $2b$. Les deux configurations possibles du trou borgne sont illustrées dans la figure III.2 : a) configuration symétrique (telle qu'on la trouve dans les références [107], [108]) ou b) configuration asymétrique [109, 112]. Nous nous plaçons dans la deuxième configuration, plus réaliste et présentant moins de contraintes expérimentales. L'asymétrie du trou entraîne un décalage de l'axe neutre de la plaque ($z = 0$) avec celui de la zone sous le trou ($z' = 0$). Nous verrons que ce décalage induit un couplage entre les différents types d'ondes présents dans le milieu. Les modèles analytiques décrits dans cette partie ne prennent pas en compte le caractère anisotrope du silicium et le caractère fini de la plaque, contrairement à la méthode FDTD que nous verrons en fin de chapitre.

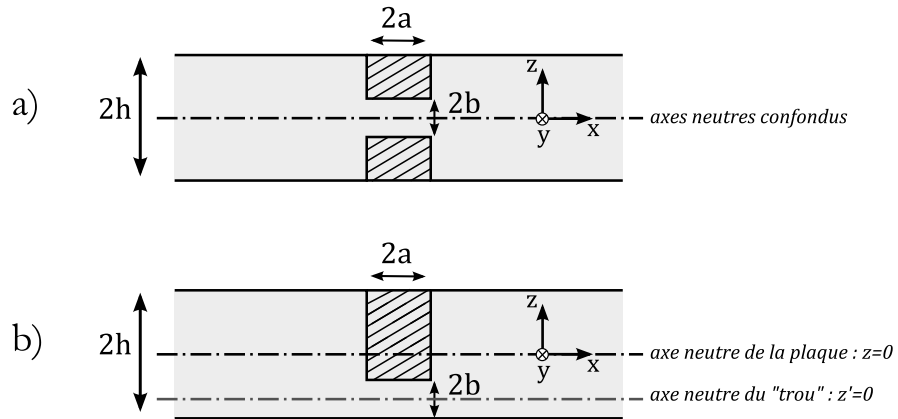


FIGURE III.2 – Géométrie du problème en coupe sagittale : a) configuration symétrique, b) configuration asymétrique.

Dans de tels systèmes, il existe deux familles de modes propagatifs : les ondes de cisaillement polarisées horizontalement et les ondes de Lamb, polarisées dans le plan sagittal (cf. chapitre I).

Pour de faibles produits {fréquence×épaisseur}, seuls les deux modes fondamentaux de Lamb se propagent : le mode symétrique S_0 et le mode antisymétrique A_0 assimilables respectivement à une onde de compression et une onde de flexion dans ces régimes de fréquences faibles (la fréquence de coupure du premier mode d'ordre supérieur, A_1 , se situe aux alentours 7 MHz pour wafer de silicium (100) de 410 μm d'épaisseur, soit bien au-delà de nos fréquences de travail).

III.4 Résonances du trou : approche simplifiée

Cette section a pour vocation de déterminer par une approche simple les fréquences de résonance et les modes de vibration de la fine épaisseur de matière qui reste au fond du diffuseur, prise de manière isolée. Localement, cette dernière peut-être vue comme une plaque circulaire de rayon a , d'épaisseur $2b$ et de condition au bord encastree. Contrairement aux autres modèles décrits plus loin, cette méthode ne prend pas en compte les phénomènes qui se déroulent en dehors du trou et qui sont couplés à celui-ci. Elle ne prévoit donc pas la manière dont va être diffusée l'onde A_0 incidente mais donne les fréquences autour desquelles la diffusion sera forte.

Il est facile de calculer les modes de vibrations d'un tel système. On se place dans le cadre des hypothèses de Kirchhoff^c, en ne considérant qu'un mouvement de flexion pure entièrement décrit par le déplacement normal w . La solution générale de l'équation biharmonique en coordonnées polaires s'écrit comme suit [113] :

$$w_n(r, \theta) = [A_n J_n(k_f r) + B_n I_n(k_f r)] \cos(n\theta) \quad (\text{III.1})$$

où l'indice n , entier naturel, correspond au nombre de diamètres nodaux des modes de vibration, J_n est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n et I_n la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre n . Les coefficients A_n et B_n

c. voir la section III.5.2.1 plus loin

déterminent la forme des modes et se déduisent des conditions au bord :

$$\begin{cases} w(r=a) = 0 \\ \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

En posant $\xi = k_f a$, l'injection des solutions (III.1) dans (III.2) mène à la résolution du déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} J_n(\xi) & I_n(\xi) \\ J'_n(\xi) & I'_n(\xi) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III.3})$$

où le prime désigne les dérivées par rapport à l'argument kr . Ces dernières s'obtiennent en utilisant les relations de récurrence des fonctions de Bessel :

$$\xi J'_n(\xi) = n J_n(\xi) - \xi J_{n+1}(\xi) \quad (\text{III.4})$$

$$\xi I'_n(\xi) = n I_n(\xi) + \xi I_{n+1}(\xi) \quad (\text{III.5})$$

le développement du déterminant de la relation (III.3) donne alors :

$$J_n(\xi) I_{n+1}(\xi) + I_n(\xi) J_{n+1}(\xi) = 0 \quad (\text{III.6})$$

Les valeurs propres ξ , racines de cette équation, s'obtiennent à partir des valeurs tabulées des fonctions de Bessel que l'on trouve dans de nombreux ouvrages (e.g. dans [113]). De ses valeurs propres on déduit les valeurs des fréquences propres de la plaque circulaire encastrée en utilisant l'expression du nombre d'onde de la théorie de Kirchhoff k_f (cf. relation (III.18) présentée plus loin) :

$$f_{n,s} = \xi_{n,s}^2 \frac{b}{2\Pi a^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}} \quad (\text{III.7})$$

Chacun des modes est désigné par le couple d'entier (n, s) où n indique le nombre de diamètre nodaux et s le nombre de cercles nodaux (en comptant le cercle nodal du bord de la plaque).

Bien que cette théorie ne puisse pas s'appliquer à un cas anisotrope, nous avons effectué les applications numériques en prenant des paramètres élastiques correspondant à la direction $[100]$ du plan de coupe (100) du silicium. Cette approximation, qui peut paraître inappropriée, est pourtant en bon accord avec les résultats expérimentaux décrits plus loin. C'est très certainement la faible anisotropie des wafers de silicium de type (100) qui nous autorise à faire cette importante approximation. Cette approche ne pourrait en revanche pas être faite pour d'autres coupes présentant une forte anisotropie.

Le tableau III.1 indique les fréquences de résonance des vingt premiers modes de vibration du système. Les paramètres de la plaque utilisés sont ceux de l'expérience, à savoir wafer de silicium (100) d'épaisseur $b = 30 \text{ }\mu\text{m}$, de rayon $a = 1 \text{ mm}$ et de masse volumique $\rho = 2329 \text{ kg/m}^3$. On rappelle les valeurs des paramètres élastiques dans la direction $[100]$: $E_{[100]} = 130.2 \text{ GPa}$, $\mu_{[100]} = 79.4 \text{ GPa}$ et $\nu_{[100]} = 0.279$.

TABLEAU III.1 – Les 20 premières fréquences de résonance en kHz de la plaque de silicium (100) circulaire clampée.

[illegible]

III.5 Modèles simplifiés de la théorie des plaques

La présence du défaut asymétrique implique le couplage entre les différents types de mouvements présents dans la plaque. Il est donc nécessaire de décrire les ondes dans le plan (S_0 et SH_0) et les ondes de type flexion (A_0) par des modèles adéquats. Différentes approches peuvent être alors envisagées : la théorie de l'élasticité tridimensionnelle prend en compte tous les modes présents dans la plaque (modes de Lamb et modes SH, cf. chapitre I), qu'ils soient propagatifs ou évanescents. Cette méthode, de part son caractère exact, présente l'inconvénient d'être difficile à mettre en œuvre. Ces obstacles ont motivé le développement de méthodes alternatives à cette description tridimensionnelle. Leur domaine de validité en terme de produit {fréquence×épaisseur} dépend de leur degré de simplification. Suivant le type de mouvement des ondes se propageant dans la plaque, différentes approximations sont utilisées : pour décrire les ondes dont le mouvement se fait essentiellement dans le plan de la plaque, i.e. l'onde S_0 et l'onde de cisaillement horizontal fondamentale SH_0 , on utilisera le modèle de **Poisson**. Les mouvements de type flexion de plaque induits par A_0 peuvent être décrits par la théorie de **Mindlin** (ou Reissner-Mindlin) ou plus simplement la théorie de **Kirchhoff**.

III.5.1 Mouvements dans le plan : ondes S_0 et SH_0

On utilise le modèle de Poisson pour décrire les ondes dont la polarisation est essentiellement dans le plan de la plaque (exactement pour SH_0). On se place dans le cadre de la décomposition de Helmholtz qui permet de découpler les composantes longitudinales et transversales du champ de déplacement \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \wedge \psi \quad (\text{III.8})$$

De part la géométrie du diffuseur, on adoptera le système de coordonnées cylindriques (cf. figure III.3) dont l'origine coïncide avec le centre du trou. Tout point M sera donc repéré par ses coordonnées r, θ, z . Les composantes du champ de déplacement

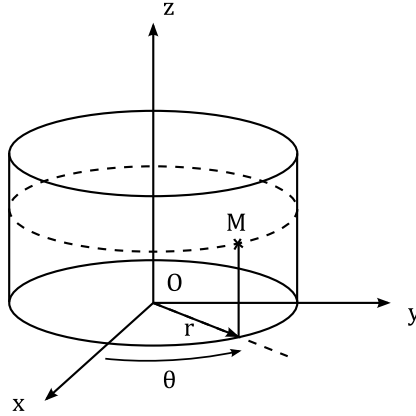


FIGURE III.3 – Système de coordonnées choisi.

ment à trois dimensions s'expriment alors comme suit :

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z} \quad (\text{III.9})$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \quad (\text{III.10})$$

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\psi_\theta r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} \quad (\text{III.11})$$

L'épaisseur de la plaque étant faible, on fait l'hypothèse des "contraintes planes" selon laquelle le champ de contrainte en tout point ne dépend que des coordonnées r et θ . Ainsi l'étude est réduite à deux dimensions en ne considérant que les mouvements membranaires dans le plan moyen (ou plan neutre) de la plaque :

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} \quad (\text{III.12})$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \quad (\text{III.13})$$

En suivant la même démarche que dans la section I.2 du premier chapitre, on trouve qu'à une fréquence donnée, les potentiels ϕ et ψ_z (qu'on notera ψ), liés respectivement à une onde de compression et à une onde de cisaillement horizontal, vérifient une équation de Helmholtz :

$$\Delta \phi + k_P^2 \phi = 0, \quad \Delta \psi + k_T^2 \psi = 0 \quad (\text{III.14})$$

avec

$$k_P^2 = \frac{\omega^2}{c_P^2}, \quad k_T^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} \quad (\text{III.15})$$

$$c_P^2 = \frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}, \quad c_T^2 = \frac{E}{2\rho(1 + \nu)} \quad (\text{III.16})$$

Où c_P est la vitesse de phase de l'onde S_0 aux basses fréquences, égale à la vitesse de plaque. c_T la vitesse de phase des ondes de cisaillement. On remarque ici que les nombres d'onde k_P et k_T ne dépendent pas de l'épaisseur de la plaque et que le modèle est non dispersif. Celui-ci est donc valide dans la zone où la vitesse de phase du mode S_0 est constante, i.e à basse fréquence (le mode SH_0 est quant à lui non dispersif).

III.5.2 Mouvements de flexion : onde A_0

Nous abordons dans cette section les deux principaux modèles théoriques qui permettent de décrire la flexion des plaques : le modèle de Kirchhoff, ou théorie classique des plaques, et le modèle d'ordre supérieur de Mindlin.

La comparaison des vitesses de phase obtenues pour les différentes théories est présentée dans la figure III.4. Mindlin [101] montre ainsi que la prise en compte des effets de cisaillement et d'inertie de rotation (courbe IV) à partir de la théorie classique des plaques permet d'obtenir un modèle de flexion en accord avec la description élastique exacte du problème (courbe I). Cependant nous verrons que pour nos configurations expérimentales de faibles produits {fréquence×épaisseur}, l'utilisation du modèle de Kirchhoff (courbe II) est suffisante pour décrire la diffusion d'une onde de flexion par un trou circulaire non débouchant.

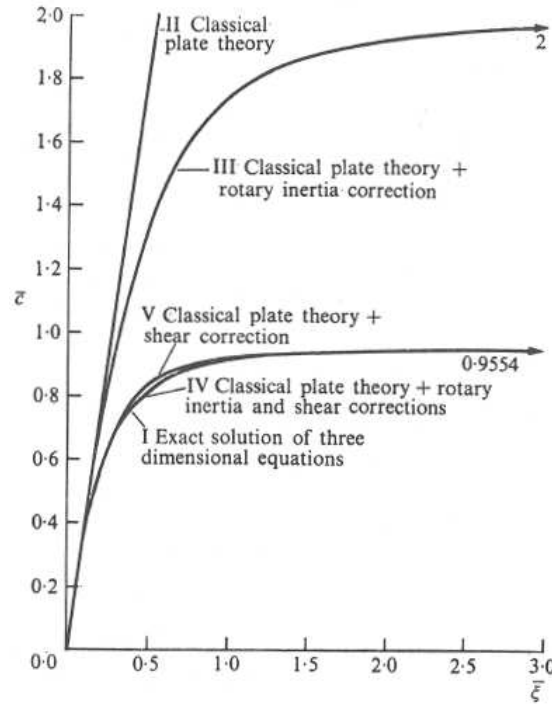


FIGURE III.4 – Comparaison des différents modèles de plaque en flexion. Les courbes représentent l'évolution de la vitesse de phase normalisée $\bar{c} = c/c_T$ en fonction du nombre d'onde normalisé $\bar{\xi} = kh/2\pi$. La valeur numérique indiquée en dessous de la courbe IV correspond à la valeur du coefficient de cisaillement κ introduit dans le modèle de Mindlin. Issu de [101].

III.5.2.1 Modèle de Kirchhoff

la théorie de Kirchhoff repose sur les hypothèses restrictives suivantes [2] :

- le matériau est élastique, homogène et isotrope
- la plaque est initialement plate
- la plaque est fine dans le sens où l'épaisseur est petite devant les autres dimensions mais comparable ou plus grande que le déplacement transverse w du plan moyen (ou feuillet moyen)
- on suppose qu'un segment initialement perpendiculaire au plan moyen (ou feuillet moyen) le reste au cours de la déformation (hypothèse de *Kirchhoff-Love*). Autrement dit on néglige les déformations de cisaillement transversal ϵ_{xz} , ϵ_{yz} ^d et la composante de la déformation normale ϵ_z .
- la contrainte σ_z dans la direction normale est nulle. Il est admissible de la considérer nulle pour tout z dans la mesure où la plaque est mince et que cette contrainte doit s'annuler sur les faces de la plaque.
- les déplacements et déformations étant de faibles amplitudes, on suppose que le plan moyen de la plaque retourne à sa position initiale non déformée après flexion.

On considère une flexion pure, harmonique, simplement dépendante de la composante normale du déplacement $u_z = w(r, \theta)$ (que l'on nomme également flèche). Sous les hypothèses de Kirchhoff décrites ci-dessus, w est régie par l'équation en double laplacien

$$\Delta^2 w - k_f^4 w = 0 \quad (\text{III.17})$$

où k_f dépend de l'épaisseur $2h$ de la plaque dans laquelle l'onde se propage :

$$k_f^4 = \frac{2\rho h \omega^2}{D} \quad (\text{III.18})$$

avec D , la rigidité de flexion, qui, dans une plaque d'épaisseur $2h$, est définie par la relation suivante :

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^2)} \quad (\text{III.19})$$

d. les déformations de cisaillement sont également notées $\gamma_{ij}/2$ au même titre qu'on trouve une notation distinctive entre les contraintes de cisaillement τ_{ij} et les contraintes normales σ_i

Il n'existe pas de solution analytique générale de cette équation biharmonique (sauf pour des plaques au contour simple, e.g. le cas circulaire encastré qu'on abordera ultérieurement).

Les autres composantes du champ de déplacement se déduisent de w par les relations suivantes :

$$u_r = -z \frac{\partial w}{\partial r} \quad (\text{III.20})$$

$$u_\theta = -\frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (\text{III.21})$$

Remarque 1 : si on se place dans le domaine de Fourier dans lequel une dérivée spatiale équivaut à une multiplication par (ik) , l'équation (III.17) devient :

$$k^4 w = \frac{3}{h^2} \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \omega^2 w \quad (\text{III.22})$$

or la quantité $\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}$ n'est rien d'autre que l'inverse du carré de la vitesse de plaque c_P . L'équation précédente s'écrit alors :

$$\omega = \frac{c_P}{\sqrt{3}} k^2 h \quad (\text{III.23})$$

Ainsi on retrouve l'expression de la relation de dispersion du mode de Lamb A_0 lorsqu'on considère la limite basse fréquence $k \mapsto 0$ (cf. I.46)

Remarque 2 : la prise en considération des pertes internes du matériau de type viscoélastique rajouterait un terme équivalent à une force de dissipation dans l'équation III.17 qui deviendrait :

$$\Delta^2 w - k_f^4 w + \mu_v \omega \Delta w = 0 \quad (\text{III.24})$$

où μ_v est le module de cisaillement visqueux. Ce dernier découle de la composante visqueuse de la contrainte introduite dans le cadre du modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt, tel qu'il est décrit par exemple dans la référence [70].

III.5.2.2 Modèle de Mindlin

Pour des produits {fréquence×épaisseur} élevés, la théorie de Kirchhoff ne donne plus de résultats fiables. On peut alors faire appel à des approximations moins restrictives, ce qui est le cas de la théorie de Mindlin [101, 102] qui ne néglige plus les effets de cisaillement transverse et d'inertie de rotation. Ainsi l'hypothèse de Kirchhoff-Love selon laquelle tout segment initialement perpendiculaire au plan médian de la plaque le reste au cours de la déformation n'est plus vérifiée. Dans ce cadre, le champ de déplacement s'exprime comme suit [107] :

$$u_r = -z\Pi_r(r, \theta) \quad (\text{III.25})$$

$$u_\theta = -z\Pi_\theta(r, \theta) \quad (\text{III.26})$$

$$u_z = w(r, \theta) \quad (\text{III.27})$$

Le déplacement transversal w se décompose en une partie propagative w_1 et une contribution évanescence w_2 (liée à l'atténuation lors de la propagation). Les rotations Π_r et Π_θ s'expriment en fonction de trois potentiels w_1, w_2 et V :

$$w(r, \theta) = w_1(r, \theta) + w_2(r, \theta) \quad (\text{III.28})$$

$$\Pi_r = A_1 \frac{\partial w_1}{\partial r} + A_2 \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (\text{III.29})$$

$$\Pi_\theta = A_1 \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + A_2 \frac{1}{r} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} \quad (\text{III.30})$$

avec

$$A_i = -1 + \frac{k_P^2}{k_i^2}$$

Ces potentiels, analogues aux potentiels ϕ et ψ dont dépendent u_r et u_θ dans le modèle de Poisson, obéissent chacun à une équation de Helmholtz :

$$\Delta w_1 + k_1^2 w_1 = 0 \quad (\text{III.31})$$

$$\Delta w_2 + k_2^2 w_2 = 0 \quad (\text{III.32})$$

$$\Delta V + k_3^2 V = 0 \quad (\text{III.33})$$

Les nombres d'ondes sont déterminés par les relations suivantes :

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(k_P^2 + k_{T'}^2) \pm \sqrt{k_f^4 + \frac{1}{4}(k_P^2 - k_{T'}^2)^2} \quad \text{et} \quad k_3^2 = \kappa^2 \frac{k_1^2 k_2^2}{k_P^2} \quad (\text{III.34})$$

où k_f est le nombre d'onde du modèle de Kirchhoff défini par la relation (III.18), k_P celui de l'onde longitudinale associée à S_0 , $k_{T'}$ celui de l'onde de cisaillement ajusté par un facteur de correction $\kappa = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ tel que $c_{T'} = \kappa c_T$ [114]. Ce facteur numérique prend en compte le fait que les déformations de cisaillement ne sont pas constantes sur l'épaisseur de la plaque.

Pour des fréquences inférieures à la fréquence de coupure du mode A_1 , seul le nombre d'onde k_1 est réel, associé ainsi à la propagation du mode A_0 . Les nombres d'onde k_2 et k_3 sont quant à eux imaginaires, liés aux ondes évanescentes. Le modèle de Mindlin compte donc un mode évanescent de plus que celui de Kirchhoff^e.

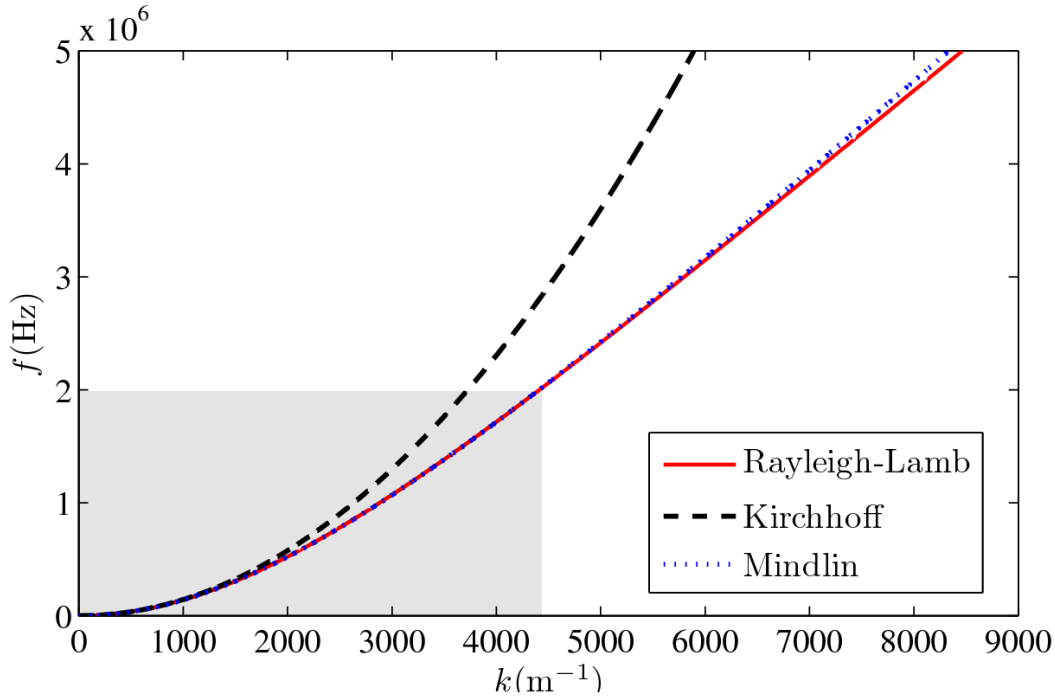


FIGURE III.5 – Comparaison des courbes de dispersion du mode A_0 : théorie exacte de Rayleigh-Lamb (trait plein), théorie de Kirchhoff (tirets) et théorie de Mindlin (pointillés). La zone grisée correspond aux fréquences considérées expérimentalement.

e. La partie évanescente de w dans le modèle de Kirchhoff n'apparaît que plus tard lors du développement infini en séries de Bessel suivant $K_m(kr)$, qui tend vers zéro pour des grands arguments

La figure III.5 résume les différentes approches qui décrivent le mode de flexion A_0 dans le cas d'un wafer de silicium (100) de $410\ \mu\text{m}$ d'épaisseur. On y voit la courbe de dispersion du mode A_0 obtenue dans chaque cas. La zone grisée correspond à la gamme de fréquence explorée dans les décrites dans la deuxième moitié de ce chapitre. Pour une fréquence de 500 kHz, la courbe de dispersion de Kirchhoff ne s'écarte de celle de la théorie exacte que de 5%. Nos faibles valeurs de produits $\{\text{fréquence} \times \text{épaisseur}\}$ (inférieurs à 0,8 MHz.mm) nous permettent d'utiliser ce modèle simplifié pour décrire les ondes de flexion. Il présente l'avantage d'impliquer des temps de calculs plus faibles que les autres modèles et une implémentation plus aisée, tout en présentant une bonne fiabilité vis-à-vis de la théorie exacte. Le développement du modèle faisant appel à la théorie de Mindlin est décrit par F. Cegla [112]. Toutefois, l'exploitation des résultats qui y sont présentés est délicate compte tenu de la présence de nombreuses erreurs typographiques et autres "zones d'ombre", non élucidées par l'auteur même de l'article. La théorie de l'élasticité exacte est quant à elle développée par T. Grahm [109]. Mais la complexité de cette dernière rend la résolution du problème de diffusion ardue et gourmande en temps de calcul. Elle ne serait vraiment utile que pour des produits $\{\text{fréquence} \times \text{épaisseur}\}$ élevés.

III.6 Modèle de diffusion de Poisson-Kirchhoff

Cette méthode, utilisée entre autres par T. Grahm [109], repose sur la combinaison des modèles de Poisson et de Kirchhoff pour décrire respectivement les ondes dans le plan S_0 , SH_0 et l'onde de flexion A_0 . Les grandeurs fondamentales du problème que sont le champ de déplacement \mathbf{u} , les déformations ϵ et les contraintes σ s'expriment alors comme la somme d'une contribution provenant du modèle de Poisson et d'une autre issue du modèle de Kirchhoff. La formulation de ces grandeurs ainsi que celles des forces et moments résultants sont indiquées en détails dans l'annexe D. Nous allons voir comment ces grandeurs se développent dans les différentes régions de la plaque (au niveau du diffuseur et hors diffuseur) et la manière dont le couplage s'effectue par l'intermédiaire des conditions de continuité et des conditions aux limites au bord du diffuseur.

III.6.1 Développement des grandeurs en séries de Bessel

On exprime les grandeurs caractéristiques dans la région du diffuseur ($r < a$) et à l'extérieur de celui-ci ($r > a$). Le système de coordonnées cylindriques pour une telle géométrie permet de séparer les variables radiales et azimutales des potentiels du modèle de Poisson-Kirchhoff et ainsi exprimer les solutions comme une somme infinie de séries de Bessel. Cette méthode analytique de développement en fonctions d'onde^f est utilisée dans une grande majorité des articles traitant de la diffusion des ondes de Lamb par des défauts de formes simples (e.g rectangulaire, circulaire ou sphérique) [100, 103, 104, 107–110, 112, 116, 117].

On considère une onde A_0 incidente monochromatique d'amplitude unité qui va être en partie transmise dans la zone sous le trou et en partie diffusée dans la plaque environnante. L'onde incidente se propage suivant les x positifs dans la plaque :

$$w_{inc} = e^{ik_f^>x} = e^{ik_f^>r \cos \theta}, \quad \phi^{inc} = 0, \quad \psi^{inc} = 0 \quad (\text{III.35})$$

$k_f^>$ et $k_f^<$ indiquent si le nombre d'onde du modèle de Kirchhoff est calculé dans la plaque d'épaisseur $2h$ ou au niveau du défaut où l'épaisseur de matière restante vaut $2b$. Le développement de Jacobi Anger permet de décomposer l'onde plane incidente en une somme infinie de fonctions de Bessel :

$$w_{inc} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k_f^>r) e^{im\theta}, \quad \phi^{inc} = 0, \quad \psi^{inc} = 0 \quad (\text{III.36})$$

où J_m est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre m .

De manière analogue, on exprime les potentiels des modèles en somme de fonctions de Bessel.

En dehors de la région du diffuseur, il vient :

$$\phi^>(r, \theta) = h \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m H_m(k_P r) e^{im\theta} \quad (\text{III.37})$$

$$\psi^>(r, \theta) = h \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m H_m(k_T r) e^{im\theta} \quad (\text{III.38})$$

$$w^>(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c_m H_m(k_f^>r) + d_m K_m(k_f^>r)) e^{im\theta} \quad (\text{III.39})$$

f. que l'on nomme également méthode de développement des fonctions propres ou encore méthode de séparation des variables [115]

Sous le trou :

$$\phi^<(r, \theta) = h \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_m J_m(k_P r) e^{im\theta} \quad (\text{III.40})$$

$$\psi^<(r, \theta) = h \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m J_m(k_T r) e^{im\theta} \quad (\text{III.41})$$

$$w^<(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (g_m J_m(k_f^< r) + h_m I_m(k_f^< r)) e^{im\theta} \quad (\text{III.42})$$

La détermination des coefficients de développement a_m, \dots, g_m permet de connaître en tout point l'amplitude des champs diffusés par le trou borgne. Ils sont déterminés à partir des conditions au bord du diffuseur que nous allons définir dans le paragraphe suivant.

Le choix des fonctions de Bessel est imposé par le caractère fini du champ diffusé en $r = 0$ et les conditions sortantes ou rayonnantes lorsque $r \mapsto \infty$ pour éviter toute singularité. H_m est la fonction de Hankel de premier type^g d'ordre m (ou fonction de Bessel de troisième espèce), correspondant aux ondes sortantes, K_m la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre m qui décroît exponentiellement pour des arguments réels larges et I_m est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre m , finie lorsque $r \mapsto 0$. Le facteur de normalisation h est introduit pour que les coefficients de développement aient même dimension.

g. $H_m = J_m + iY_m$ où Y_m est la fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre m

III.6.2 Conditions de continuité et de couplage au bord du diffuseur

D'une manière générale, les conditions de continuité au bord du diffuseur concernent le champ de déplacement \mathbf{u} et le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$.

En $r = a$, le déplacement est continu dans la portion de matière qui reste sous le trou :

$$\mathbf{u}^{inc} + \mathbf{u}^> = \mathbf{u}^< \quad \text{pour} \quad 0 < z' < 2b \quad (\text{III.43})$$

Les contraintes sont également continues dans cette portion mais s'annulent sur les parois libres du trou en $r = a$:

$$(\boldsymbol{\sigma}^{inc} + \boldsymbol{\sigma}^>).\hat{\mathbf{e}}_r = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{pour} \quad -h < z < h \\ \boldsymbol{\sigma}^<.\hat{\mathbf{e}}_r & \text{pour} \quad -b < z' < b \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

où $\hat{\mathbf{e}}_r$ désigne le vecteur radial unitaire.

A ces conditions de continuité s'ajoutent des conditions de couplage, qui proviennent du caractère non symétrique du trou par rapport au plan médian de la plaque. Le décalage des axes neutres, égal à $(h - b)$ va induire un couplage entre les moments de flexion, torsion et les efforts radial et tranchant donc entre les différents modes A_0 , S_0 et SH_0 .

Dans le cadre du modèle combiné de Poisson-Kirchhoff, les conditions précédentes impliquent huit équations de continuité qui concernent les déplacements, les moments et les forces développés dans les paragraphes précédents.

Pour les déplacements, on a :

$$\frac{\partial \phi^>}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^>}{\partial \theta} + (h - b) \frac{\partial w^>}{\partial r} = \frac{\partial \phi^<}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^<}{\partial \theta} \quad (\text{III.45})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi^>}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi^>}{\partial r} + (h - b) \frac{1}{r} \frac{\partial w^>}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi^<}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi^<}{\partial r} \quad (\text{III.46})$$

$$w^{inc} + w^> = w^< \quad (\text{III.47})$$

$$\frac{\partial w^{inc}}{\partial r} + \frac{\partial w^>}{\partial r} = \frac{\partial w^<}{\partial r} \quad (\text{III.48})$$

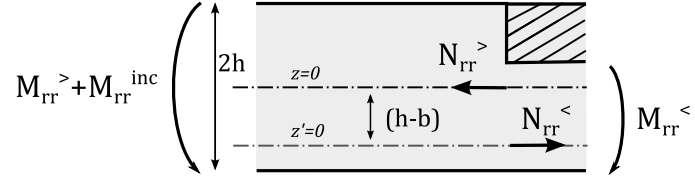


FIGURE III.6 – Motivation pour l'équation de continuité (III.52).

Les deux premières conditions indiquent la continuité des composantes u_r et u_θ sur l'axe neutre du fond de trou $z' = 0$. Les dernières concernent la continuité du déplacement transverse w et de la dérivée radiale de ce dernier.

Les conditions de continuité pour les forces et les moments s'expriment comme suit :

$$N_{rr}^> = N_{rr}^< \quad (\text{III.49})$$

$$N_{r\theta}^> = N_{r\theta}^< \quad (\text{III.50})$$

$$V_r^> + V_r^{inc} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} ((h-b) N_{r\theta}^<) = V_r^< \quad (\text{III.51})$$

$$M_{rr}^> + M_{rr}^{inc} + (h-b) N_{rr}^< = M_{rr}^< \quad (\text{III.52})$$

où N_{rr} et $N_{r\theta}$ désignent l'effort normal et l'effort tranchant dans le plan de la plaque, M_{rr} et $M_{r\theta}$ représentent respectivement le moment de flexion et le moment de torsion et V_r la composante radiale de la réaction de bord de Kelvin-Kirchhoff (cf. annexe D).

Les relations (III.51) et (III.52) font apparaître chacune un terme de couplage, proportionnel à l'écart des axes neutres des différentes régions $(h-b)$. Ces termes représentent les moments induits par les efforts radial et tranchant qui doivent être compensés respectivement par les moments de flexion et de torsion en dehors et dans la zone du diffuseur. La motivation pour le terme de couplage de l'équation (III.52) est illustrée dans la figure (III.6), inspirée de [112].

Lorsqu'on injecte les grandeurs développées en série de Bessel dans les conditions de continuité, on obtient un système d'équations à huit inconnues pour chaque ordre de développement m qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 0 & 0 & \alpha_{37} & \alpha_{38} \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} & 0 & 0 & \alpha_{47} & \alpha_{48} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & 0 & 0 & \alpha_{55} & \alpha_{56} & 0 & 0 \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & 0 & 0 & \alpha_{65} & \alpha_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{73} & \alpha_{74} & \alpha_{75} & \alpha_{76} & \alpha_{77} & \alpha_{78} \\ 0 & 0 & \alpha_{83} & \alpha_{84} & \alpha_{85} & \alpha_{86} & \alpha_{87} & \alpha_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \\ c_m \\ d_m \\ e_m \\ f_m \\ g_m \\ h_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ 0 \\ 0 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \end{pmatrix} \quad (\text{III.53})$$

Les éléments α_{ij} de cette matrice sont donnés dans la section D.2 de l'annexe D. Les termes β_i à droite de l'égalité correspondent aux composantes non nulles du champ incident.

Nous avons écrit un code sous Matlab qui permet de trouver les coefficients a_m, b_m, \dots, h_m dans le cadre de la théorie de Poisson-Kirchhoff, pour une onde A_0 monochromatique incidente. La résolution exacte de ce système impliquerait une sommation sur une infinité d'ordre m . En pratique, ce nombre est gouverné par le rapport du rayon du trou sur la longueur d'onde. Après des tests de convergence, nous avons trouvé que seuls sept ordres de développement en séries de Bessel suffisent. Les ordres supérieurs ont une influence négligeable sur le champ diffusé et tendent rapidement vers zéro.

Nous avons déterminé les coefficients de développement en utilisant la méthode de l'élimination de Gauss, évitant ainsi l'inversion explicite de la matrice α qui serait plus coûteuse en temps de calcul et moins précise.

III.6.3 Evaluation de la section efficace de diffusion

La résolution des différents coefficients permet d'accéder aux amplitudes de chaque mode présent dans la plaque, résultant de la diffusion et de la conversion du mode A_0 incident par le diffuseur. Chacun d'entre eux possède une composante du déplacement qui prédomine sur les autres :

- la composante u_r pour le mode S_0
- la composante u_θ pour le mode SH_0
- la composante u_z pour le mode A_0

Ces composantes en champ lointain s'expriment comme suit :

$$U_{r,\theta,z}^\infty(\theta) = \frac{|u_{r,\theta,z}|}{\max(|w^{inc}(a, \theta)|)} \sqrt{2r} \quad , \quad r \mapsto \infty \quad (\text{III.54})$$

L'expression (III.54) permet d'accéder aux diagrammes de diffusion des différentes composantes en champ lointain. Quelques exemples pour la composante $U_{r,\theta,z}^\infty$ sont présentés dans la figure III.7 pour différentes fréquences en considérant la diffusion par un trou borgne de 2 mm de diamètre et de 380 μm de profondeur dans une plaque de silicium infinie de 410 μm d'épaisseur^h. La direction de l'onde incidente coïncide avec l'angle π . A noter que les diagrammes à 108 kHz et 122 kHz se situent à proximité de la première et deuxième résonance de la fine plaque circulaire clampée équivalente au fond du diffuseur. On constate que la diffusion est isotrope pour une fréquence égale à la première résonance du trou.

La capacité du trou à diffuser l'onde incidente est déterminée par sa section efficace de diffusion. Cette quantité, qui a la dimension d'une longueur, s'obtient en intégrant le carré des composantes en champ lointain dans toutes les directions [108] :

$$\sigma_{scat} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |U_{r,\theta,z}^\infty(\theta)|^2 d\theta \quad (\text{III.55})$$

h. le modèle étant isotrope, on réalise ici la même approximation qu'auparavant en considérant les paramètres suivant la direction [100] de la coupe (100).

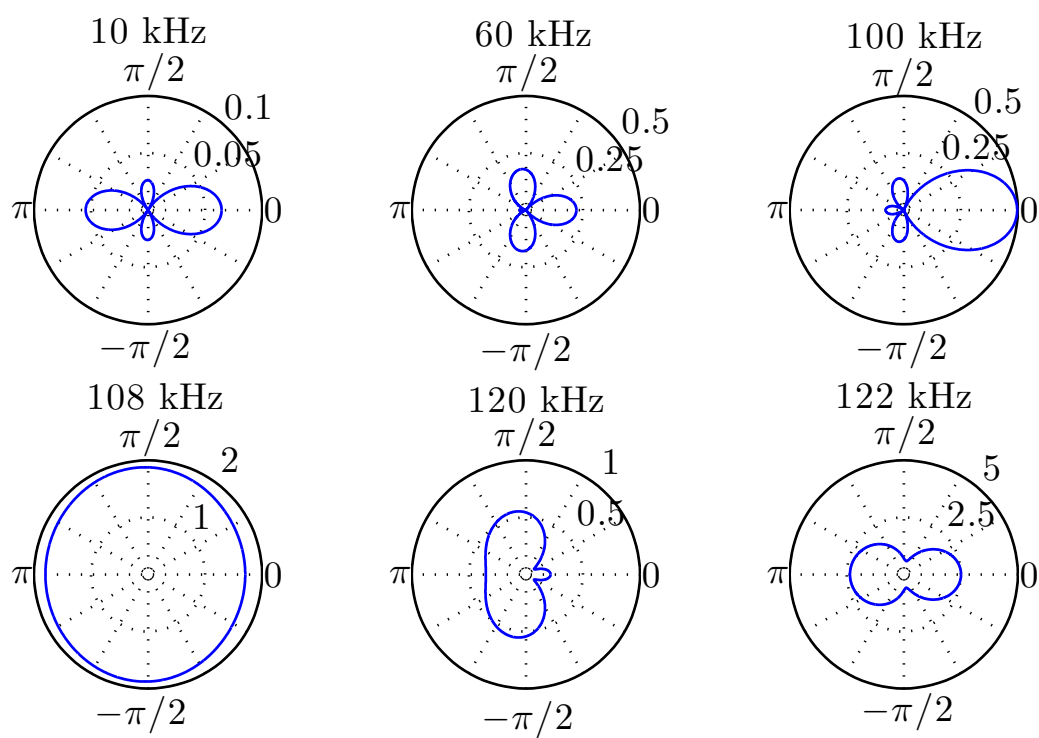


FIGURE III.7 – Exemples de diagrammes de diffusion de la composante en champ lointain U_z^∞ pour différentes fréquences. L'unité est arbitraire.

Nous verrons dans le chapitre suivant que l'on peut caractériser le désordre d'un milieu hétérogène par le libre parcours élastique moyen l_e (qui représente la distance moyenne entre deux diffusions). Dans une approximation de milieu dilué, cette quantité est liée à la section efficace de diffusion σ_{scat} et à la densité surfacique N de diffuseurs par la relation suivante :

$$l_e = \frac{1}{N \sigma_{scat}} \quad (\text{III.56})$$

Par conséquent, pour être dans les régimes de fort désordre qui nous intéressent, on cherchera à maximiser σ_{scat} en fonction des paramètres géométriques du diffuseur.

La figure suivante présente la section efficace de diffusion pour la configuration décrite quelques lignes plus haut. Le calcul a été réalisé sur une plage de fréquence allant de 0 à 2 MHz avec une résolution de 5 Hz. Les pics de la section efficace de diffusion correspondent aux résonances de la fine épaisseur de matière située sous le trou.

Rappelons que ce modèle n'est valable que pour des fréquences faibles (ou plus justement des produits {fréquence×épaisseur} faibles). Grahn [109] montre que l'écart par rapport à la théorie exacte est d'autant plus grand que les paramètres $\omega h/c_T$ et b/h sont grands. En particulier, pour un rapport $b/h = 0.5$, une déviation est observée à partir de $\omega h/c_T = 0.4$ soit une fréquence d'environ 1.4 MHz dans le cas de nos plaques de 410 μm d'épaisseur coupées suivant le plan (100). Or, dans nos expériences, l'épaisseur du fond de trou est de 30 μm soit un rapport $b/h \approx 0.07$ nettement inférieur à celui utilisé par Grahn. Ce dernier point élargit le domaine de validité du modèle, ainsi, on peut considérer que dans notre gamme de fréquences expérimentales, allant de 0 à 2 MHz, le modèle de Poisson-Kirchhoff donne des résultats fiables.

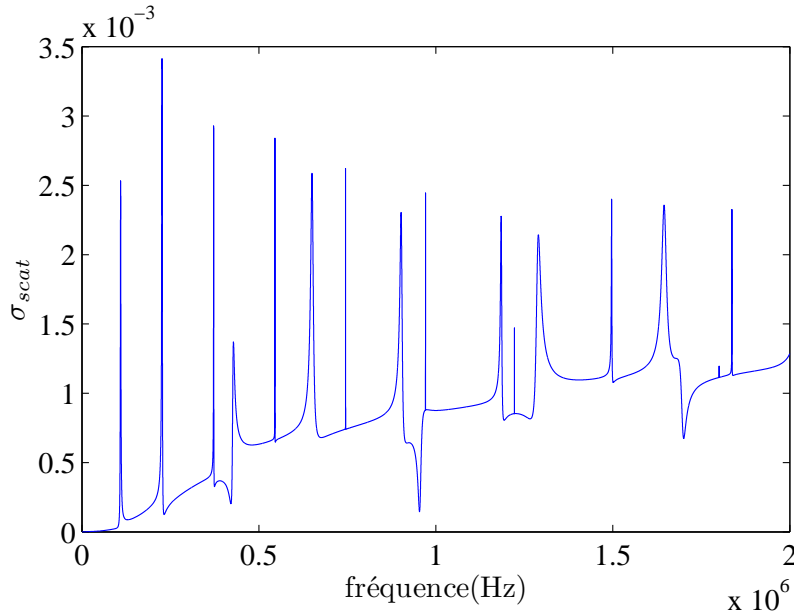


FIGURE III.8 – Section efficace de diffusion calculée avec le modèle de Poisson-Kirchhoff.

III.6.4 Dépendances géométriques de la section efficace de diffusion

Intéressons nous maintenant à l'évolution de la section efficace de diffusion en fonction des dimensions du trou (rayon et profondeur). On considère la même plaque de silicium (100) de $410\ \mu\text{m}$ d'épaisseur contenant un trou borgne dont on fait varier soit le rayon, soit la profondeur.

La figure III.9 présente la section efficace de diffusion d'un trou borgne de $380\ \mu\text{m}$ de profondeur dont on fait varier le diamètre. Les résonances du diffuseur qui apparaissent dans la section efficace de diffusion se décalent vers les basses fréquences lorsque le rayon du trou augmente.

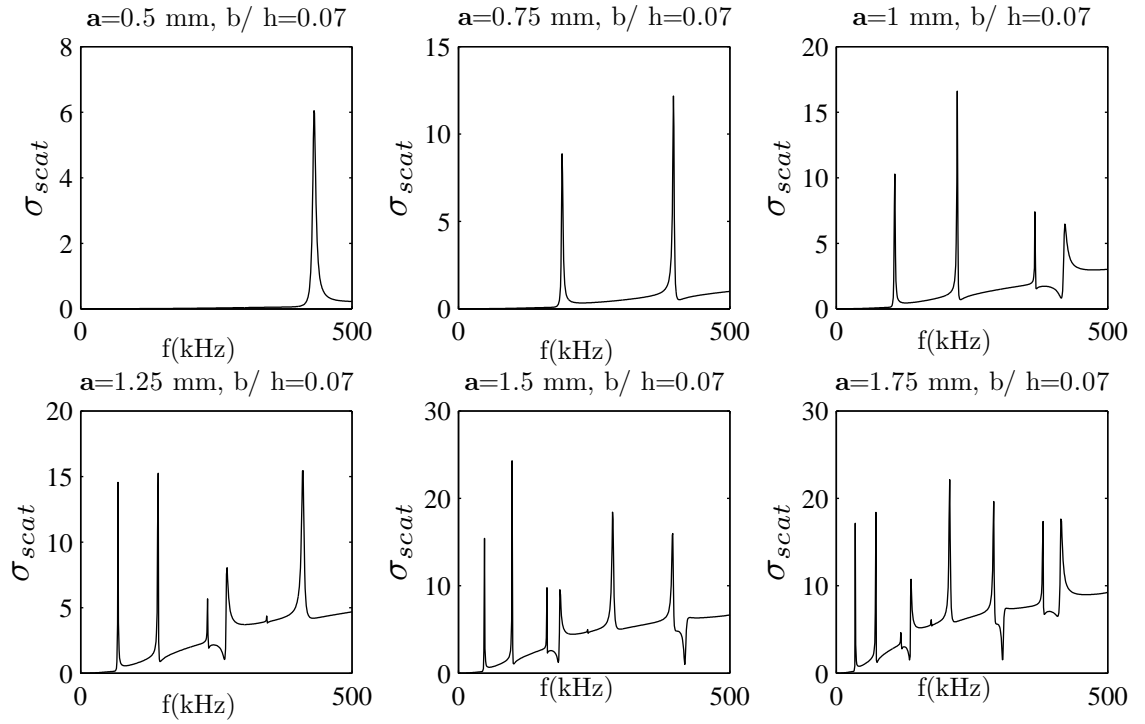


FIGURE III.9 – Evolution de la section efficace de diffusion pour un trou borgne de rayon croissant et de $380 \mu m$ de profondeur situé dans une plaque infinie de silicium de $410 \mu m$ d'épaisseur.

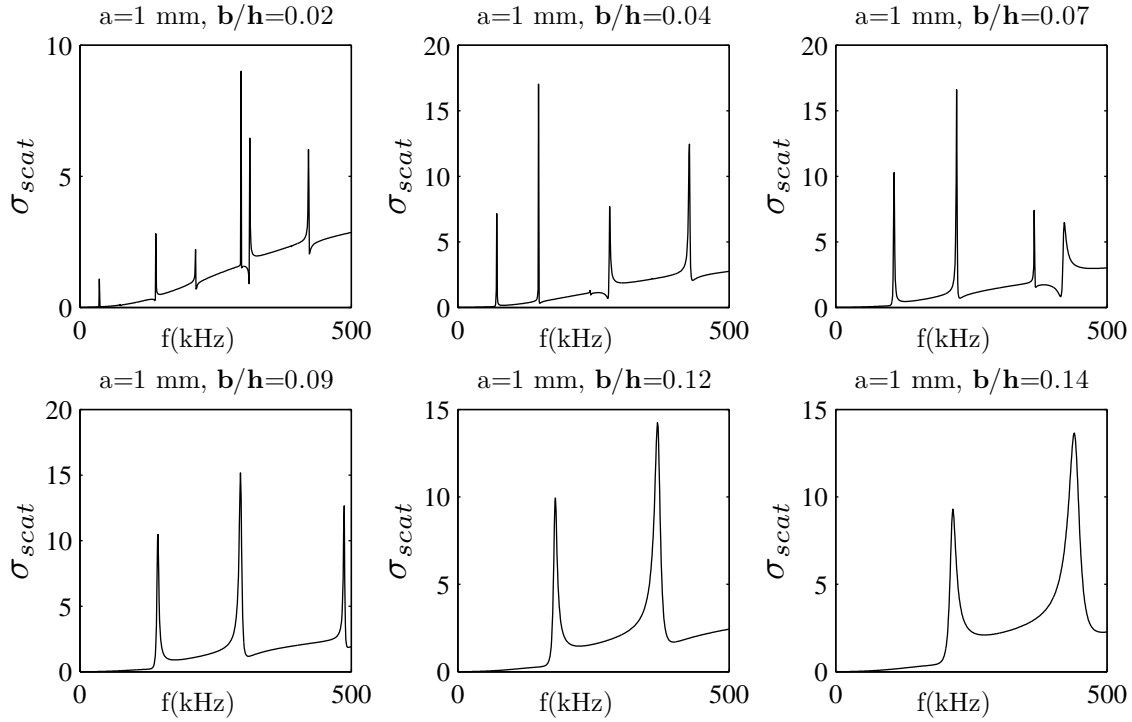


FIGURE III.10 – Evolution de la section de diffusion pour une profondeur décroissante d'un trou borgne de rayon 1 mm situé dans une plaque infinie de silicium de $410 \mu m$ d'épaisseur.

La figure III.10 montre l'évolution de la section de diffusion d'un trou borgne de 1 mm de diamètre dont on fait varier la profondeur. On constate que pour des profondeurs croissantes, autrement dit pour une épaisseur de matériau au fond du diffuseur de plus en plus fine, les résonances du trou se décalent vers les basses fréquences. Ce dernier point présente un avantage dans le cas où on veut des résonateurs petits devant la longueur d'ondeⁱ : cette condition de résonateur basse fréquence peut en effet être atteinte pour un fond de trou très fin pour un diamètre de trou donné.

i. voir les perspectives concernant les métamatériaux en toute fin de chapitre

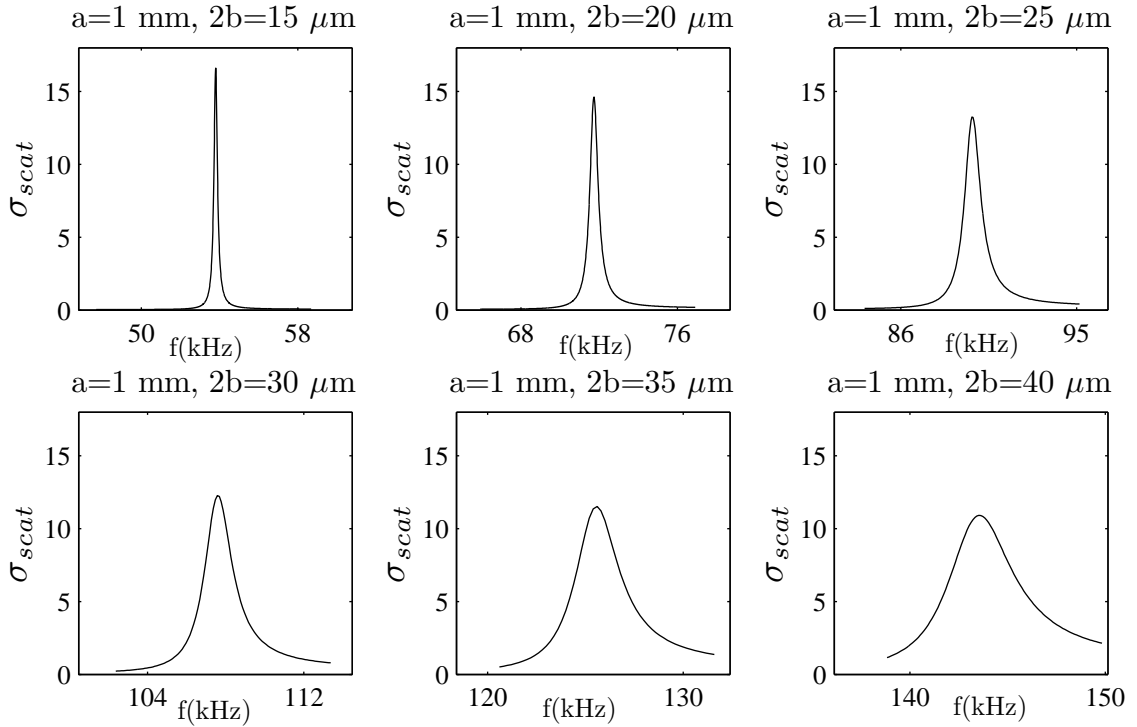


FIGURE III.11 – Evolution de la section de diffusion autour de la première résonance du trou, pour une profondeur décroissante.

Pour mieux apprécier l'évolution de la section de diffusion autour d'une résonance en fonction des paramètres géométriques, intéressons nous à la première résonance. La figure III.11 illustre la dépendance de la section de diffusion autour de la première résonance du trou pour une profondeur de trou décroissante. On voit que σ_{scat} est d'autant plus piquée que l'épaisseur du fond du trou est faible. Le même comportement est observé si on se focalise sur les autres résonances du diffuseur.

Les dépendances de la première fréquence de résonance vis-à-vis de l'épaisseur du fond du trou $2b$ et du rayon a sont résumées dans la figure III.12. La courbe en pointillés rouge représente l'évolution en fonction de $1/a^2$. Ainsi, cette figure démontre la dépendance en $2b/a^2$ de la fréquence de résonance, conformément à la formule III.7 de la section III.4. De part l'ensemble de ces observations, l'approche qui consiste à assimiler le fond du trou borgne à une plaque fine circulaire au bord encastré donne des résultats très satisfaisants quant aux positions des résonances du

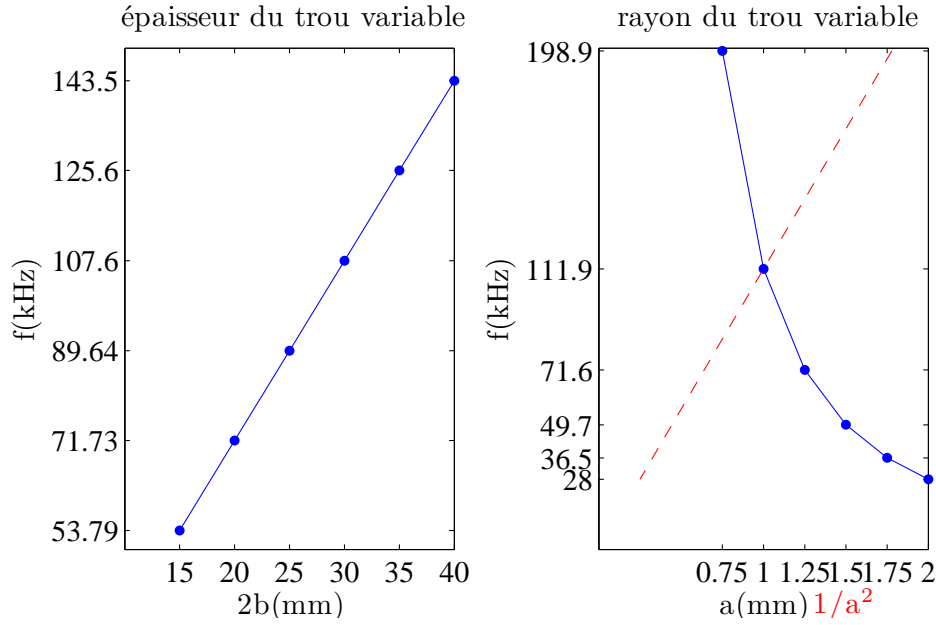


FIGURE III.12 – Evolution de la première fréquence de résonance en fonction de l'épaisseur du fond du trou $2b$ et du rayon a pour six valeurs croissantes. La courbe en pointillés rouge désigne la dépendance vis-à-vis de l'inverse du carré du rayon du diffuseur.

diffuseur.

La dernière figure de cette section (III.13) a pour vocation d'illustrer la sensibilité de la position des résonances vis-à-vis d'une variation d'épaisseur ou de diamètre du fond du diffuseur. La courbe en trait plein correspond au cas de référence avec un trou de 1 mm de rayon et d'épaisseur 30 μm . Les courbes en pointillés et en tirets/pointillés correspondent respectivement à une augmentation de 10% du rayon (soit $a' = 1.1$ mm) et une diminution de 10% de l'épaisseur du trou borgne ($2b'' = 27$ μm). Bien que relativement la variation de rayon ait plus d'incidence sur la position de la résonance (18% contre 10%, ce qui est en accord avec la formule III.7), on remarque qu'une très faible variation d'épaisseur, de l'ordre de quelques microns, modifie de manière non négligeable la position de la résonance ; ici on observe un décalage vers les basses fréquences de 11 kHz. La précision sur la profondeur de gravure du trou sera par conséquent un paramètre important, surtout si on veut un effet collectif des diffuseurs.

C'est elle qui déterminera en grande partie l'incertitude sur la position des résonances du diffuseur.

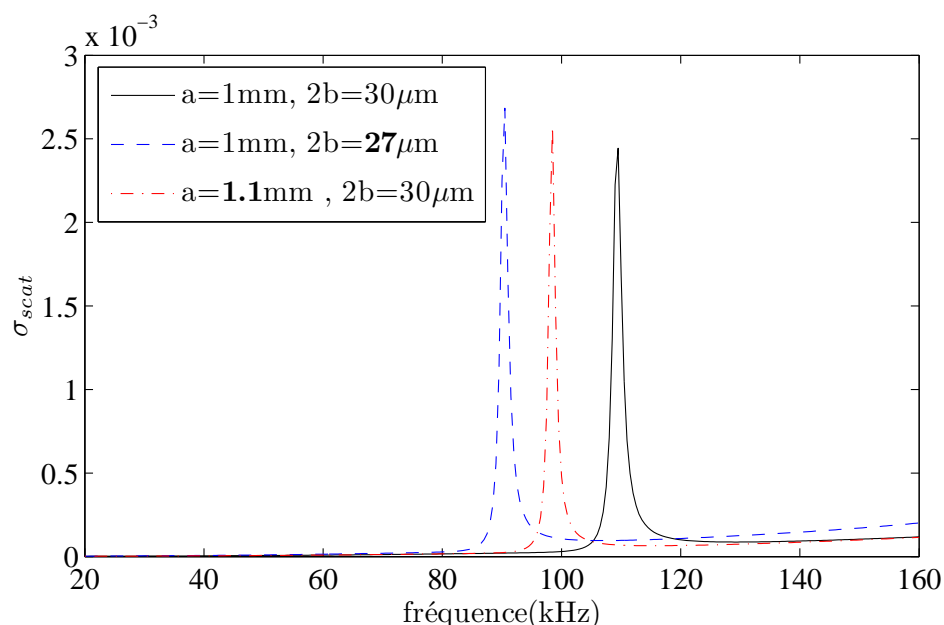


FIGURE III.13 – Sensibilité de la position de la première résonance du trou vis-à-vis de ses paramètres géométriques : les courbes en tirets et en tirets/pointillés montrent les effets d'une variation de 10% d'épaisseur ou de rayon par rapport à la courbe de base (trait plein).

III.7 Expériences et résultats

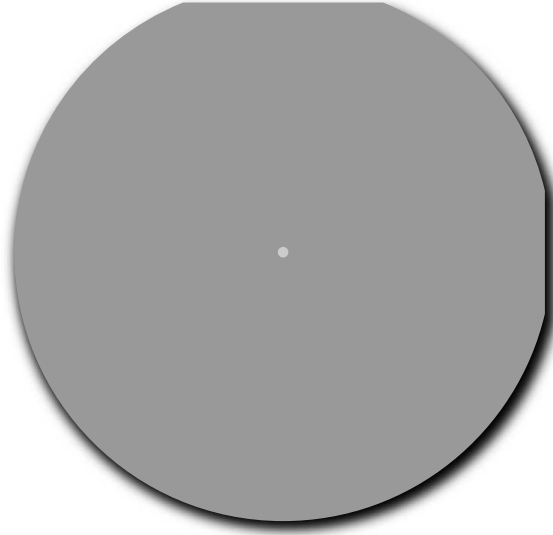


FIGURE III.14 – Wafer de silicium de 4 pouces avec un trou borgne en son centre.

III.7.1 Échantillon à forte densité modale

Une première expérience a été réalisée avec un wafer de silicium (100) de 4 pouces de diamètre (cf. figure III.14), épais de $410\text{ }\mu\text{m}$ et contenant en son centre un trou borgne de 2 mm de diamètre et profond de $380\text{ }\mu\text{m}$. La fabrication de cet échantillon a été confiée à la plateforme technologique du Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes (LAAS) à Toulouse, dans le cadre d'une collaboration^j entre l'équipe Propagation des Ondes en Milieux Complexes du LPMC et l'équipe photonique du LAAS. Le processus utilisé est une gravure sèche par plasmas. Cette méthode hautement anisotrope permet d'assurer une très bonne verticalité des flancs des trous percés. Des précisions sur le processus de gravure utilisé pour fabriquer nos échantillons sont apportées dans l'annexe E.

j. Projet PEPS 07-20 2007-2008

L'excitation des ondes ultrasonores, effectuée en dehors du trou borgne, est assurée par le transducteur piézoélectrique de contact (modèle *Panametrics M109*) couplé à une pointe de silice, pour assurer le caractère ponctuel de la source et limiter les perturbations avec l'échantillon. Une photographie du montage expérimental est présentée dans la figure III.15. Le transducteur assure un mode de transmission de type longitudinal et possède une fréquence centrale de 5 MHz avec une bande passante de 100%. Le signal fourni au transducteur est constitué de 2 cycles de sinusoïde à 500 kHz à enveloppe gaussienne. De par sa nature, l'excitation génère principalement un mode A_0 incident. Dans le cadre de ses travaux de thèse sur la localisation de source en milieu réverbérant par retournement temporel, Guillemette Ribay [70] a montré numériquement qu'une excitation par un impact favorise la génération du mode A_0 au détriment de S_0 , pour des faibles produits {fréquence \times épaisseur}. En particulier dans le cas d'une plaque d'aluminium de 410 μm d'épaisseur, et pour une excitation de fréquence centrale 500 kHz, le rapport des énergies des modes A_0 sur S_0 vaut approximativement 100. Il semble raisonnable d'admettre qu'un tel comportement ne dépende pas directement des paramètres élastiques du matériau mais plutôt de la nature de la source. Ainsi on peut considérer que la prédominance du mode A_0 généré se retrouve dans le cas du silicium.

Le wafer de silicium est orienté de telle sorte que le trou est situé côté génération. Ainsi, la surface côté détection est plane, ce qui permet de mesurer le champ dans le trou sans altérer la qualité de la mesure réalisée avec la sonde interférométrique laser^k. Le balayage expérimental, centré autour du trou, est une grille carrée de 1 cm^2 constitué de 10 000 points de mesures et dont la résolution spatiale est de 100 μm . Chaque signal stocké dispose d'une résolution temporelle de 40 ns pour une durée totale de 20 ms, soit 500 000 points temporels. En chacun des points de la grille, une moyenne sur 20 mesures est effectuée afin d'améliorer le rapport signal sur bruit tout en assurant une durée d'expérience raisonnable (15 heures dans le cas présent).

On rappelle que les données stockées en chaque point de la grille de balayage représentent l'évolution du déplacement normal en fonction du temps. A partir de chacun de ces points de mesure on peut reconstruire l'évolution globale du champ

k. ce problème ne se pose pas pour des sondes laser plus récentes qui disposent d'une focalisation automatisée

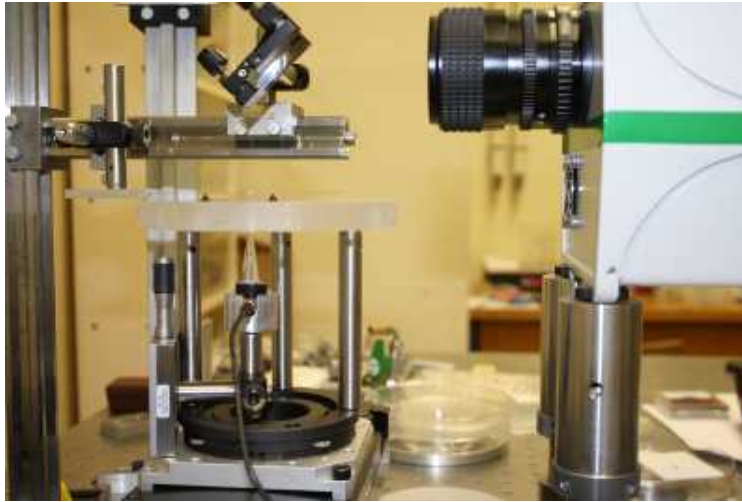


FIGURE III.15 – Photographie du dispositif expérimental.

de vibration de la plaque au cours du temps. Une transformée de Fourier de ces données permet d'accéder aux distributions spatiales du module et de la phase du champ pour chaque valeur de fréquence. À chaque fréquence de résonance du système, on peut ainsi représenter les modes correspondants.

Sur la figure III.16, on compare la section efficace de diffusion calculée avec le modèle de Poisson-Kirchhoff (courbe noire) et le spectre expérimental (courbe rouge). Ce dernier est obtenu en réalisant une moyenne sur une dizaine de spectres pris en différents points dans la zone du trou, en évitant les points situés sur des nœuds de vibrations des premiers modes. Des différentes possibilités envisageables (spectre en un point, moyenne de différents spectres sur une zone plus ou moins étendue), cette représentation semble être la plus adaptée et la moins bruitée, nous permettant de voir un maximum de résonances dans la gamme de fréquences considérée.

On note un très bon accord entre théorie et expérience pour la position des résonances avec seulement 2 % d'écart pour les deux premiers. La figure III.17 présente les mesures expérimentales des parties réelles des quatre premiers modes de vibration du trou, semblables à ceux d'une plaque fine circulaire au bord encasté.

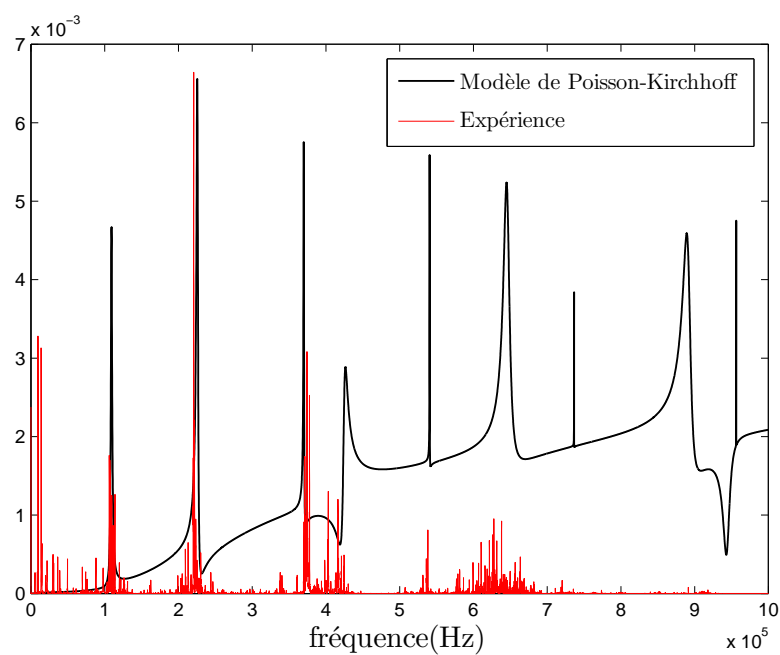


FIGURE III.16 – Comparaison entre la section efficace de diffusion du modèle de Poisson-Kirchhoff et les données expérimentales.

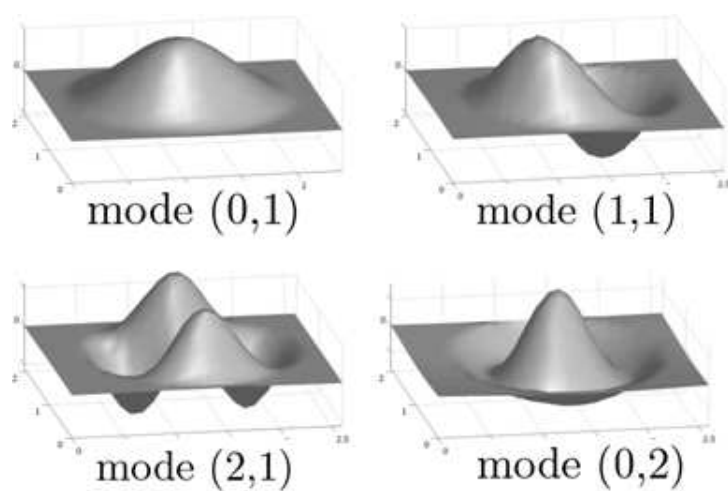


FIGURE III.17 – Représentation tridimensionnelle des parties réelles des 4 premiers modes du diffuseur résonant obtenues expérimentalement.

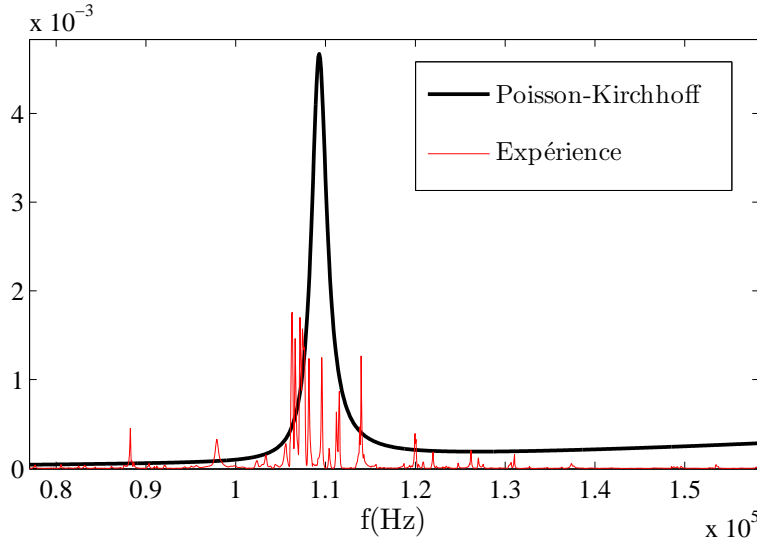


FIGURE III.18 – Grossissement de la figure III.16 autour de la première résonance du diffuseur.

Si maintenant on regarde de plus près la première résonance du spectre expérimental (cf. figure III.18), on remarque qu’il n’y a pas un pic isolé mais plutôt une distribution de pics autour de la résonance.

Ceci s’explique par le fait que le trou se situe lui même dans une cavité fermée qui possède ses propres modes, d’autant plus nombreux que les dimensions de la plaque sont grandes (et que la plaque est fine).

Une représentation tridimensionnelle de ce couplage est présentée dans la figure III.19. Cette dernière fait apparaître l’évolution du spectre le long d’une ligne de mesure de 4 mm de long qui passe par le centre du trou. La zone du trou se situe entre 4 et 6 mm (axe des ordonnées). La courbe en arrière-plan représente la section de diffusion calculée avec le modèle de Poisson-Kirchhoff et permet de situer la position des résonances du diffuseur.

Entre 4 et 6 mm, on observe bien les résonances du trou et entre celles-ci d’autres résonances induites par les modes de la plaque environnante.

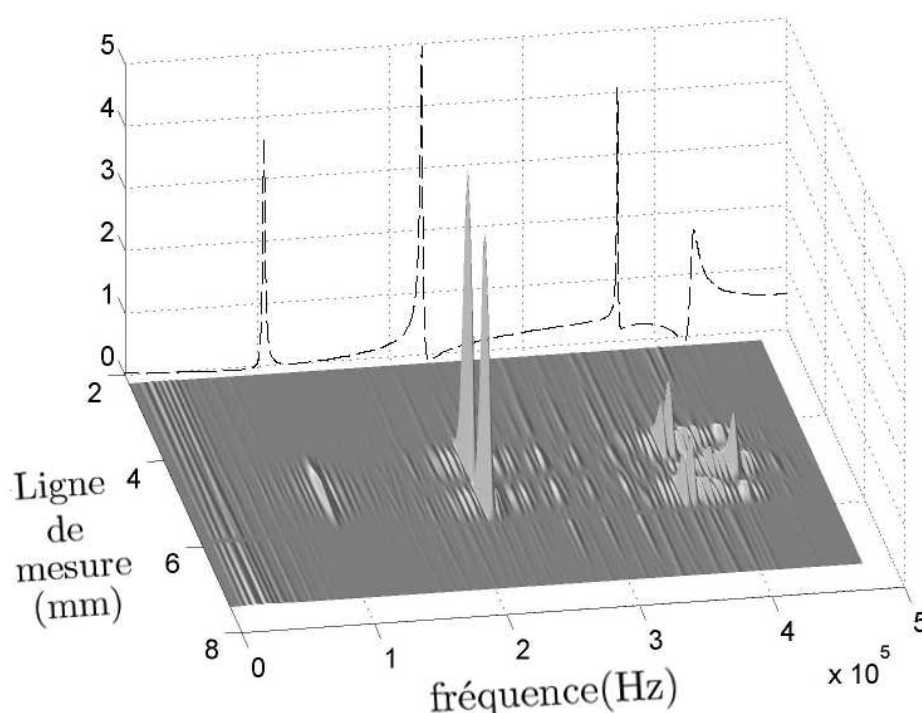
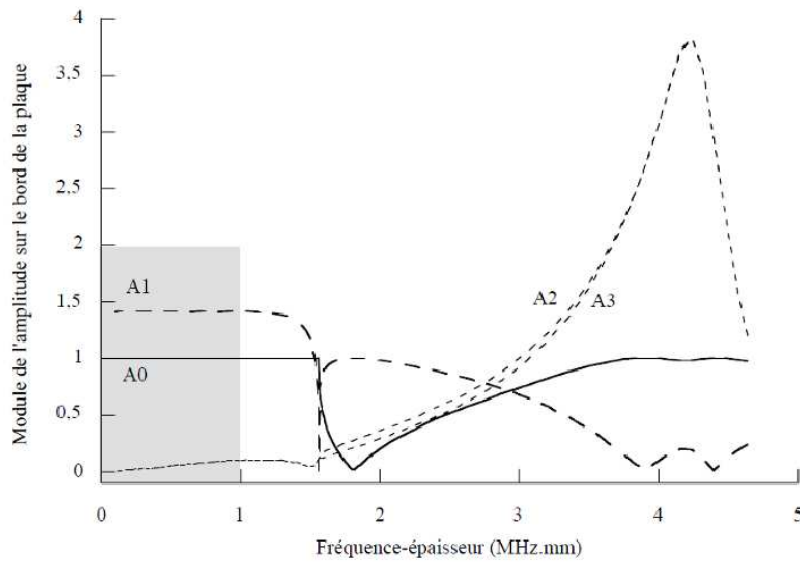
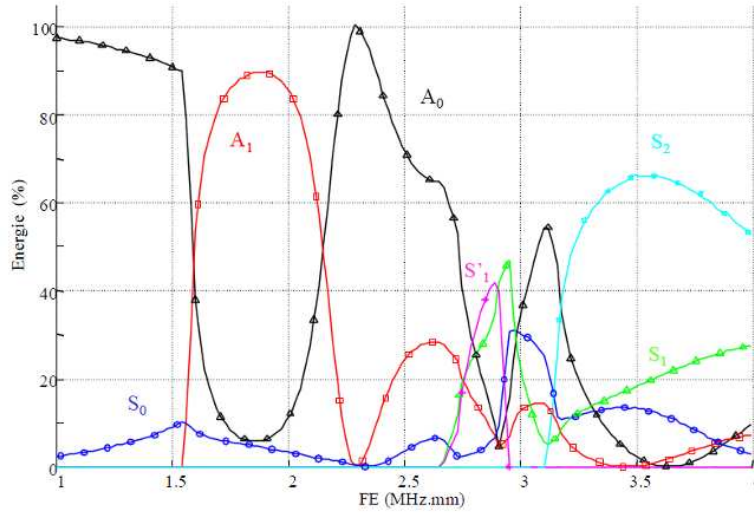


FIGURE III.19 – Illustration du couplage entre les modes du trou et ceux de la plaque.

En plus d'induire un couplage entre les modes de la plaque et ceux du trou, on peut se poser la question de l'influence des bords de la plaque finie sur la conversion des différents modes qui se propagent dans le milieu. On peut en effet s'attendre à ce qu'il y ait conversion entre ceux-ci à chaque réflexion sur les bords de la plaque en plus de celles induites par le défaut asymétrique. Même dans le cas idéal où l'angle d'un bord de la plaque est droit, il a été montré numériquement et expérimentalement [118] qu'il existe des conversions entre modes de même famille (symétriques ou antisymétriques si le mode incident est S_0 ou A_0) du moment que les fréquences considérées sont au-delà des fréquences de coupure des modes d'ordres supérieurs. Ces conversions sont d'autant plus importantes que le biseau de la plaque s'éloigne de 90° . Cependant, pour un angle de bord de 75° et en dessous de la fréquence de coupure de A_1 , le mode A_0 incident se conserve au pire à 90% à la réflexion et n'est que très peu converti en S_0 , comme on peut le constater dans la figure III.20.



Nos valeurs faibles de produits {fréquence×épaisseur} (d'un maximum de 1 MHz.mm) nous situe en tout début de courbe. Par conséquent, même dans le cas où les bords de nos échantillons auraient un biseau pas tout à fait droit, il est raisonnable de négliger les conversions de bords.

Remarque : Si on peut négliger les conversions entre les deux familles de modes symétrique et antisymétrique, on ne peut en revanche faire abstraction de la contribution du mode A_1 en bord libre de plaque [12, 110]. En effet, ce dernier, bien que non propagatif à ces fréquences, possède une amplitude importante comme en témoigne la figure (III.21) qui présente le module des quatre premiers modes de Lamb en bord d'une plaque d'aluminium quand le mode A_0 est incident.

L'interaction du mode A_0 sur les bords libres d'une plaque a également été étudié par Ribay *et al.* [119]. Ils présentent des expériences qui confirment le déphasage de $\pi/2$ de A_0 à la réflexion et une augmentation d'un facteur $\sqrt{2}$ de son amplitude en bord de plaque. Nous avons pu observer ce phénomène expérimentalement pour une plaque rectangulaire de silicium aux bords libres, comme l'illustre la figure III.22.

On y voit le profil spatial normalisé le long d'une ligne (en pointillés) du mode (3,3). Le rapport des amplitudes bord/centre donne 1.4106 pour le bord inférieur de la plaque et 1.4667 pour le bord supérieur, soit $\sqrt{2}$ respectivement à 0.3% et 4% près.

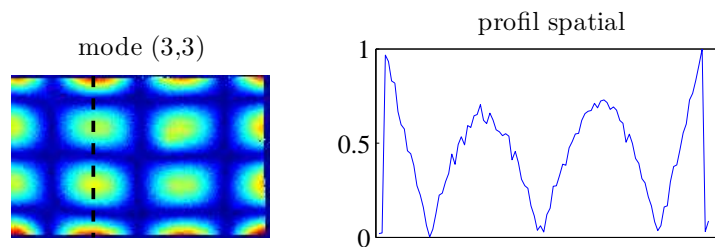


FIGURE III.22 – Mode (3,3) d'une plaque rectangulaire de silicium et profil spatial le long d'une ligne (en pointillés).

L'expérience décrite dans cette section a permis de mettre en exergue le fort couplage entre le diffuseur résonant et la plaque qui l'entoure. Pour diminuer ce dernier, nous avons tenté de minimiser la réflexion des bords en collant sur chaque face un anneau d'élastomère (PDMS) présentant un profil d'épaisseur progressif afin d'éviter toute rupture d'impédance à l'interface solide/élastomère. La figure III.23 présente une photographie de l'échantillon avec PDMS et l'évolution du spectre au centre du trou avec (courbe magenta) et sans élastomère (courbe noire). L'influence de l'élastomère sur le spectre n'est malheureusement pas celle escomptée. En effet, les anneaux de PDMS couplent les modes du système vers l'extérieur, augmentant ainsi leur largeur spectrale. Le recouvrement spectral conséquent complique la discrimination entre les modes du diffuseur et ceux de la plaque.

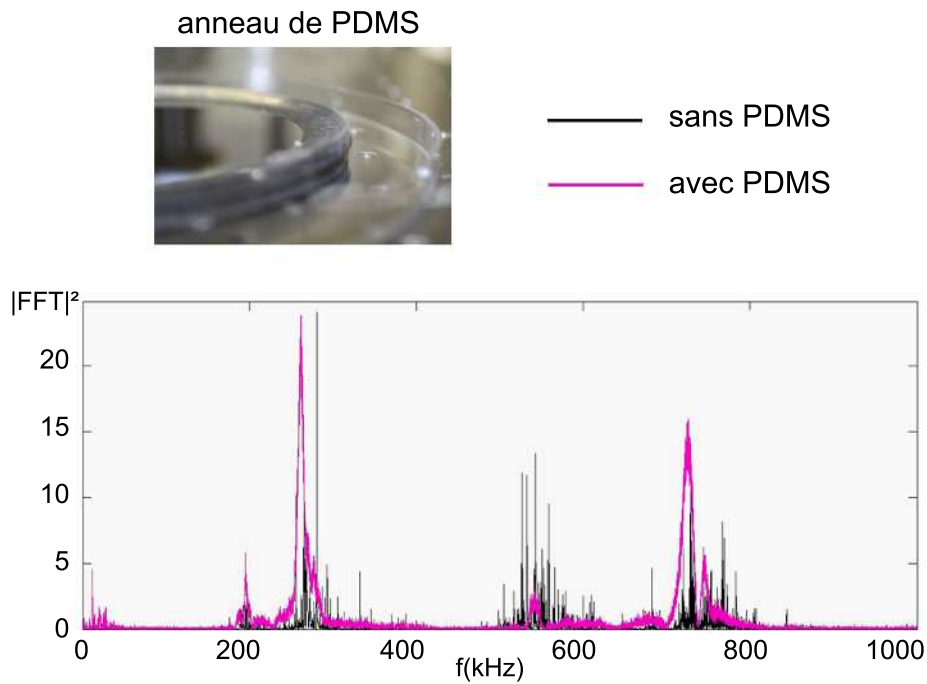


FIGURE III.23 – Effets de l'ajout d'anneaux de PDMS sur les bords de l'échantillon. La courbe noire correspond au spectre du centre du trou mesuré sans les anneaux de PDMS. La courbe magenta correspond au cas avec PDMS. L'amplitude de cette dernière a été multipliée par 50 pour pouvoir être comparée au cas sans élastomère.

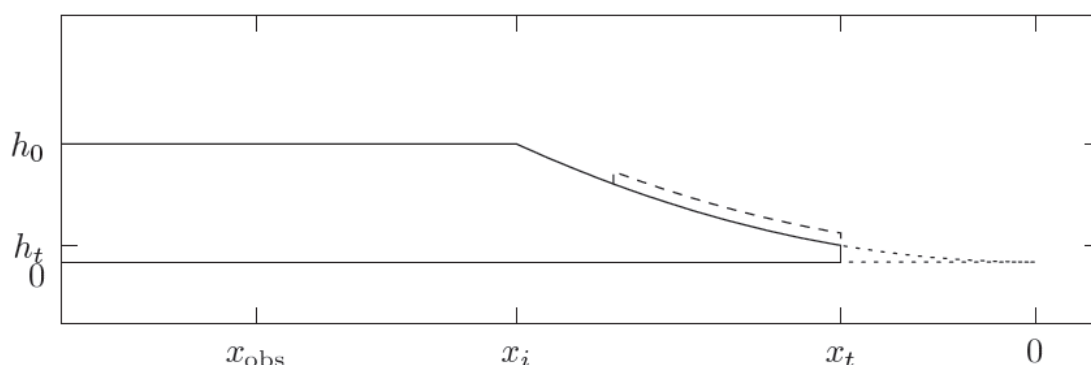


FIGURE III.24 – Coupe sagittale du bord d'une poutre présentant un profil de "trou noir acoustique" avec une couche d'absorbant (représentée par des tirets). Pointillés : profil idéal ; trait plein : profil réel. Tiré de [120].

Une autre solution envisageable serait d'exploiter l'effet "trou noir acoustique" [120–122]. Le principe de ce dernier est de ralentir la célérité des ondes de flexion (proportionnelle à l'épaisseur) en diminuant progressivement l'épaisseur des bords de la plaque jusqu'à une valeur nulle. Ainsi l'onde resterait piégée dans un "trou noir acoustique" d'où elle n'en ressortirait pas. Il a été montré théoriquement [123] que le profil d'épaisseur doit suivre une loi de décroissance en puissance dont l'ordre est supérieur à deux pour pouvoir observer l'effet. La figure III.24 illustre le profil de décroissance optimal d'un bord d'une poutre. L'élément représenté par des tirets indique une fine couche d'absorbant dont le rôle est de compenser l'inévitable troncature en pratique du profil de décroissance du bord. L'optimisation de l'effet trou noir acoustique passe en outre par le choix des bons paramètres géométriques et élastiques de la couche absorbante, avec en particulier un faible module d'Young et un fort facteur de pertes internes (cf. [120] pour plus de détails). Reste à savoir si cette méthode est réalisable en pratique dans notre cas et si la diminution des réflexions de bord est significative.

Une méthode alternative pour diminuer le couplage entre le trou et la plaque et de diminuer la densité modale du système. Pour ce faire, et ainsi mieux apprécier le comportement du diffuseur de manière isolée, nous avons décidé de faire une expérience dans un échantillon à faible densité de modes, en découpant un carré de taille réduite autour du trou borgne. Les résultats expérimentaux seront confrontés à une simulation numérique par FDTD.

III.7.2 Échantillon à faible densité modale

Il n'est pas possible de manière simple de connaître le nombre exact de modes de nos cavités. En effet, il n'existe pas d'expression analytique pour calculer les fréquences propres d'une plaque aux bords libres [113], conditions aux limites qui se rapprochent le plus de nos expériences compte tenu de la faible surface de contact entre les supports coniques et l'échantillon (cf. chapitre I). Malgré tout, pour avoir une idée de la diminution du nombre de modes par rapport au disque de *4pouces*, il semble raisonnable de dire que le nombre total de modes est proportionnel à la surface de la plaque considérée. Le rapport des surfaces du wafer de *4pouces* de diamètre et du carré de 6 mm de côté vaut environ 225. On peut donc considérer qu'on a réduit considérablement le nombre de modes en diminuant la taille de l'échantillon.

III.7.2.1 Fabrication de l'échantillon et protocole expérimental

Le nouvel échantillon a été obtenu en découpant un carré de 6 mm^2 autour du trou à l'aide d'une scie à diamant (cf. figure III.25). Pour limiter les risques de casse de l'échantillon (unique!), le fil en diamant a été placé le plus proche possible d'axes cristallins du wafer de silicium (100), en s'aidant des méplats initialement présents sur le wafer de 4 pouces. Les côtés du carré correspondent donc à la famille de directions cristallines 110 et les diagonales sont suivant 100 (aux erreurs d'orientation près). Il est à noter que la précision du sciage est limitée par les $300\text{ }\mu\text{m}$ de diamètre du fil.

Malgré tout le soin porté au découpage, on note des imperfections sur la géométrie du carré et en particulier sur le centrage du trou. Ces irrégularités sont présentées dans la figure III.26.



FIGURE III.25 – Photographie de l'échantillon après découpage d'un carré de 6 mm de côté autour du trou borgne.

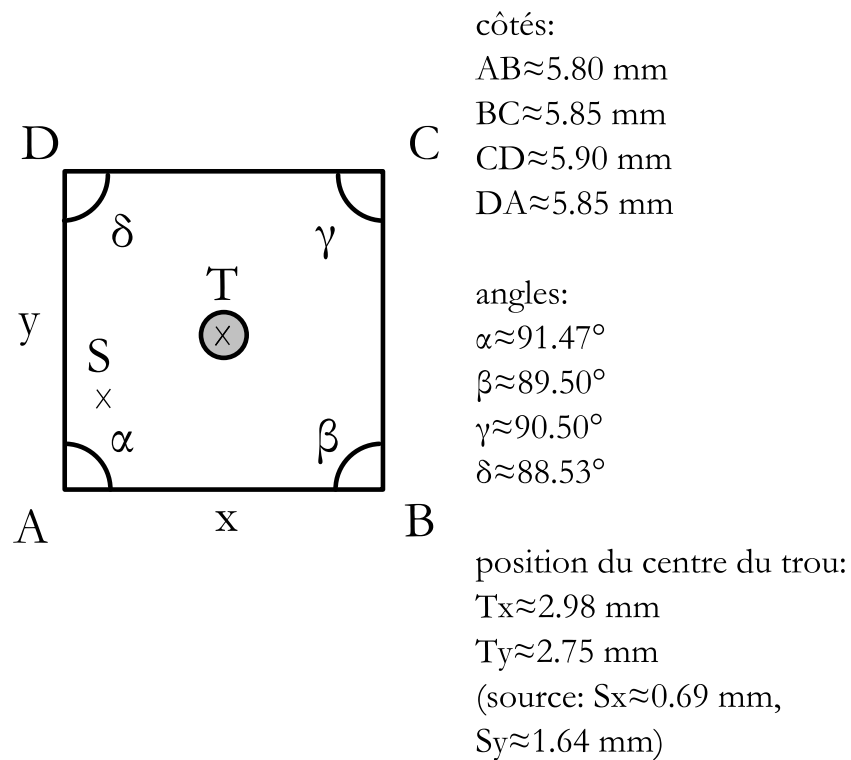


FIGURE III.26 – Irrégularités sur la géométrie du carré et le centrage du trou.

Les erreurs par rapport au carré parfait et trou centré peuvent se résumer comme suit :

- l'écart maximal sur les longueurs des différents côtés du carré est de 2%
- l'angle qui est le moins droit ne l'est pas d'environ 2%
- le trou n'est pas centré de 9% en y et 1% en x

Nous verrons que ces imprécisions ont une influence sur l'allure des fonctions d'ondes du système et impliquent en particulier des levées de dégénérescences.

Les paramètres d'excitation des ultrasons sont les mêmes que dans l'expérience précédente, à savoir une source de 500 kHz avec une bande passante de 100 %. La résolution spatiale de la grille de mesure a été augmentée à 50 μm , ce qui correspond à la résolution maximale qu'on puisse avoir compte tenu du diamètre de 50 μm du faisceau sonde. La zone de balayage de 7,25 mm² comprend environ 20 000 points de mesure ayant chacun une durée de 20 ms et une résolution temporelle de 40 ns. Quelques images représentant les premières microsecondes de l'évolution temporelle du champ de déplacement sont présentées dans la figure III.27. Ces figures ont été réalisées en appliquant un filtre passe haut à 80 kHz afin d'éliminer des basses fréquences de fortes amplitudes venant perturber le signal. Les images ont été volontairement saturées afin de mieux apprécier la dynamique de propagation des ondes de flexion.

III.7.2.2 Identification des modes et comparaison avec les modèles théoriques

La figure III.28 présente le spectre normalisé par sa valeur maximale et obtenu en moyennant les spectres d'une dizaine de points de mesure répartis dans la région du trou borgne. L'échelle logarithmique permet d'apprécier toute la dynamique entre 0 et 2 MHz et d'avoir une vue globale sur la répartition et la densité des modes du système, marqués d'une croix rouge. On en compte 90 dans cette gamme de fréquences. Au delà de 2 MHz, il devient très difficile de distinguer des modes, le niveau de signal étant de l'ordre ou inférieur au niveau de bruit. Les quelques pics hautes fréquences non marqués d'une croix ne correspondent pas à des modes mais à des bruits piqués en fréquence et répartis uniformément sur tout l'échantillon. On ignore l'origine de ces parasites.

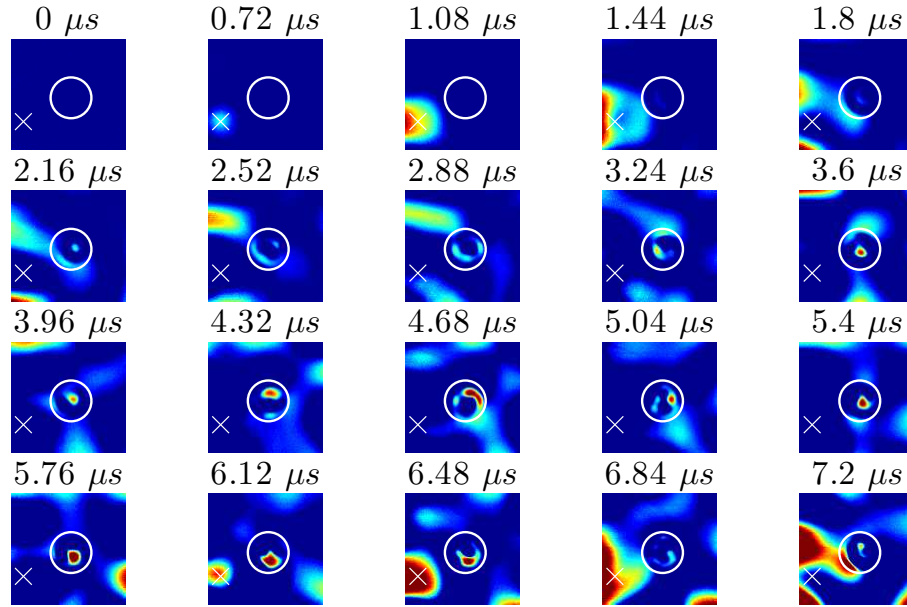


FIGURE III.27 – Dynamique du champ de déplacement transversal total mesuré au cours des premières microsecondes. La source et le diffuseur sont respectivement repérés par une croix blanche et un cercle blanc.

On peut classer les résonances du système en trois catégories :

- les quelques unes qui correspondent aux modes de la plaque carrée seule¹, pour des fréquences inférieures à la première résonance du trou (i.e en dessous de 97 kHz)
- les résonances du trou seul
- des résonances couplées entre le trou et la plaque

En réalité, nombre de ces pics correspondent à des levées de dégénérescence des modes du système. La majorité d'entre eux disposent d'au moins deux versions dégénérées. Nous aborderons la nature et les origines de ces phénomènes dans les sections suivantes.

1. qui contiendrait un trou traversant à la place du diffuseur

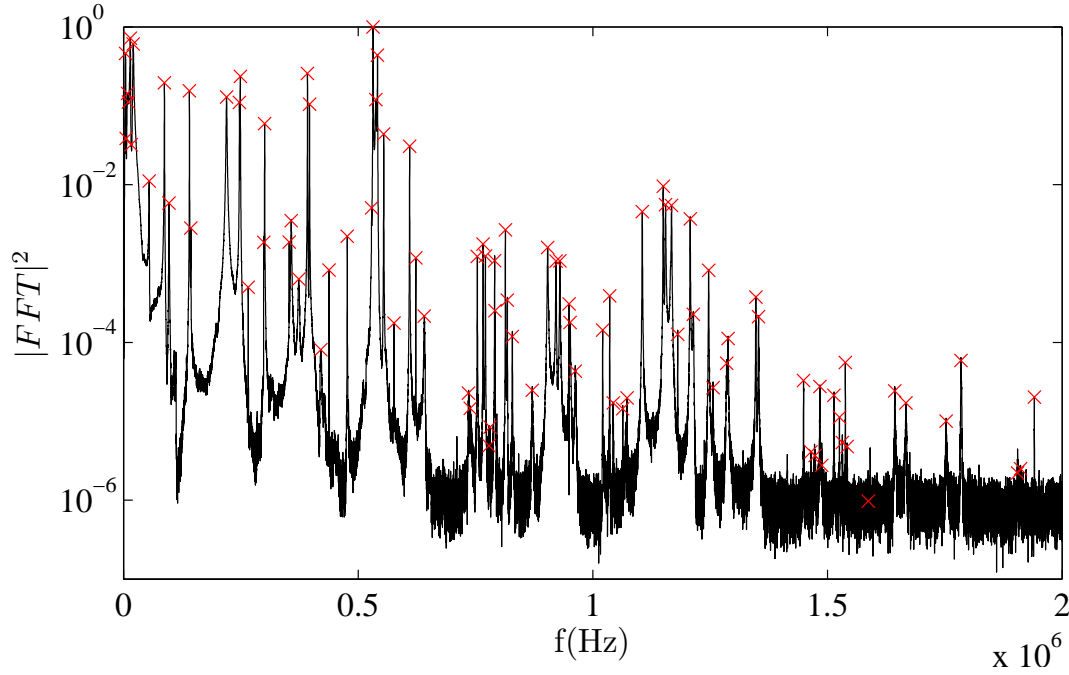


FIGURE III.28 – Spectre normalisé par son maximum en échelle logarithmique. Les positions des 90 résonances du système détectées sont marquées par des croix rouges.

Après avoir réalisé une détection de maxima pour repérer les positions des résonances du système, on affiche la distribution du champ en chacune d'entre elles afin d'identifier à quelle catégorie les différents modes appartiennent. Entre 0 et 2 MHz, on relève expérimentalement 17 modes correspondants aux résonances du trou seul, semblables à celles d'une plaque circulaire clampée en son bord. Ceux-ci sont présentés dans la figure III.29 : par ordre de fréquence croissante, on identifie les modes (0,1), (1,1), (2,1), (0,2), (3,1), (1,2), (4,1), (2,2), (0,3), (5,1), (3,2), (6,1), (1,3), (4,2), (7,1), (2,3) et (8,1). Pour que chacun des modes puisse être correctement représenté, l'échelle des couleurs utilisées pour coder l'intensité est renormalisée par le maximum à chaque image. Les modes n'ont bien évidemment pas tous le même poids, en particulier dans notre cas trois résonances dominent le spectre : le maximum est observé pour le mode dipolaire (1,1), suivent ensuite les modes (3,1) et (3,2) qui sont respectivement à 40% et 7% du maximum. Les quatorze autres résonances du trou se situent entre 0.02% et 3% de la valeur de l'amplitude du mode dipolaire.

Le poids de ces modes dépend de plusieurs paramètres dont la nature de la source, sa fréquence d'excitation ainsi que sa bande passante, et dans le cas des modes de la plaque environnante le recouvrement spatial de la source avec les modes considérés.

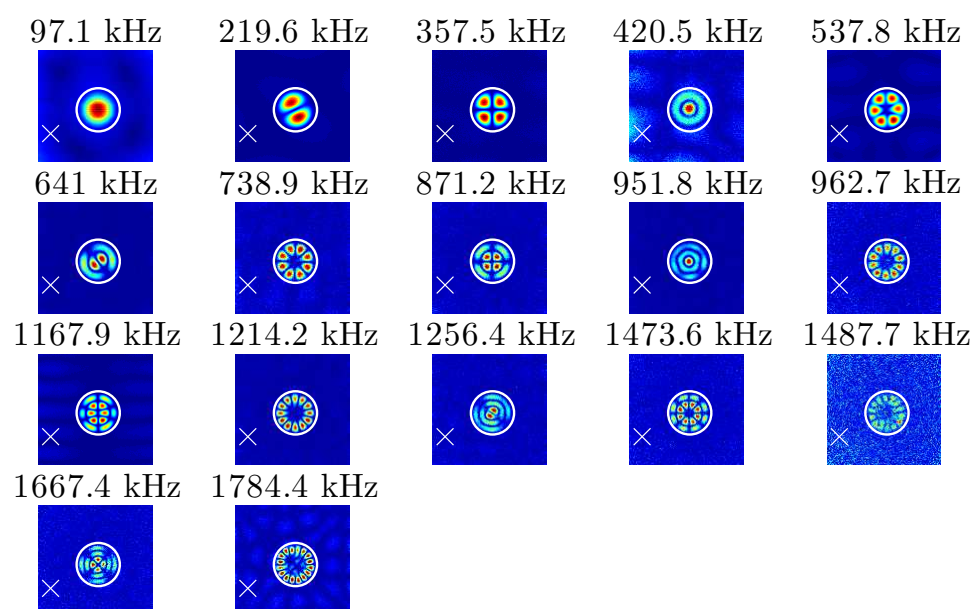


FIGURE III.29 – Les 17 premiers modes du trou identifiés (l'intensité codée par les couleurs est remise à l'échelle pour chaque image). La source et le diffuseur sont respectivement repérés par une croix blanche et un cercle blanc.

Par rapport aux valeurs théoriques calculées pour une plaque circulaire clampée et indiquées dans le tableau III.1, on note une inversion sur la position des modes (7,1) et (4,2). Ces derniers, relativement proches en théorie se retrouvent éloignés et inversés en pratique : 1503 kHz et 1503.6 kHz contre respectivement 1488 kHz et 1474 kHz dans l'expérience. Une autre différence provient de l'absence du mode (0,4) dans l'expérience alors qu'il est présent dans les valeurs tabulées entre le mode (2,3) et le mode (8,1). Le dernier mode (5,2) théoriquement présent vers 1844 kHz n'est également pas observé expérimentalement.

Au final, sur les 19 résonances prévues par les valeurs tabulées, on en identifie 17 expérimentalement^m. La théorie de Poisson-Kirchhoff prévoit quant à elle 18 fréquences propres.

^m. sans compter ceux liés aux nombreuses levées de dégénérescences abordées plus loin

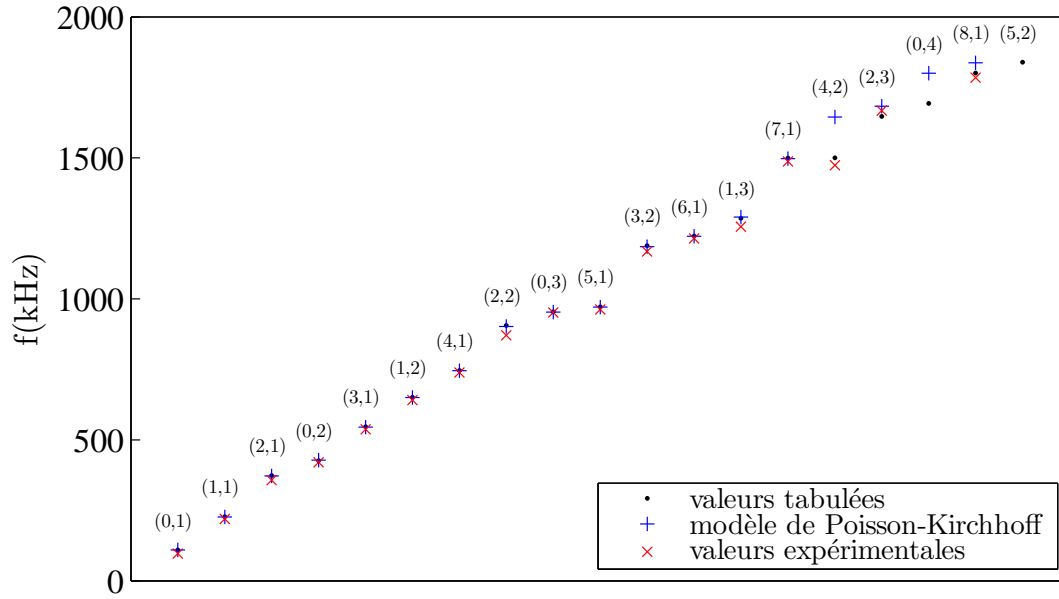


FIGURE III.30 – Positions des résonances obtenues théoriquement et expérimentalement. Le nom des modes est indiqué au dessus de chaque point.

Les positions des résonances obtenues avec les modèles théoriques sont identifiées avec l'expérience est résumées dans la figure III.30. Le nom des modes est indiqué pour chaque position des résonances. On note un très bon accord entre les théories et l'expérience pour l'intervalle de fréquence considéré, bien qu'elles ne considèrent qu'un milieu isotrope. Notons cependant que le modèle de Poisson-Kirchhoff ne prévoit pas directement la forme des modes. Il est peut-être possible de les déduire à partir des sections efficaces de diffusion mais nous faisons l'hypothèse qu'ils apparaissent dans le même ordre que le prévoit la théorie simple de la plaque fine circulaire au bord encastré.

Les écarts relatifs des valeurs expérimentales avec les valeurs tabulées et le modèle de Poisson-Kirchhoff sont présentés dans les histogrammes de la figure III.31. Globalement les fréquences obtenues expérimentalement sont sur-estimées par les modèles théoriques. Ce biais peut s'expliquer par la résistance de l'air dans les expériences qui a tendance à décaler les résonances vers les basses fréquences. On constate un bon accord entre les valeurs expérimentales et les valeurs tabulées, avec un écart variant entre 0.2% à 13%.

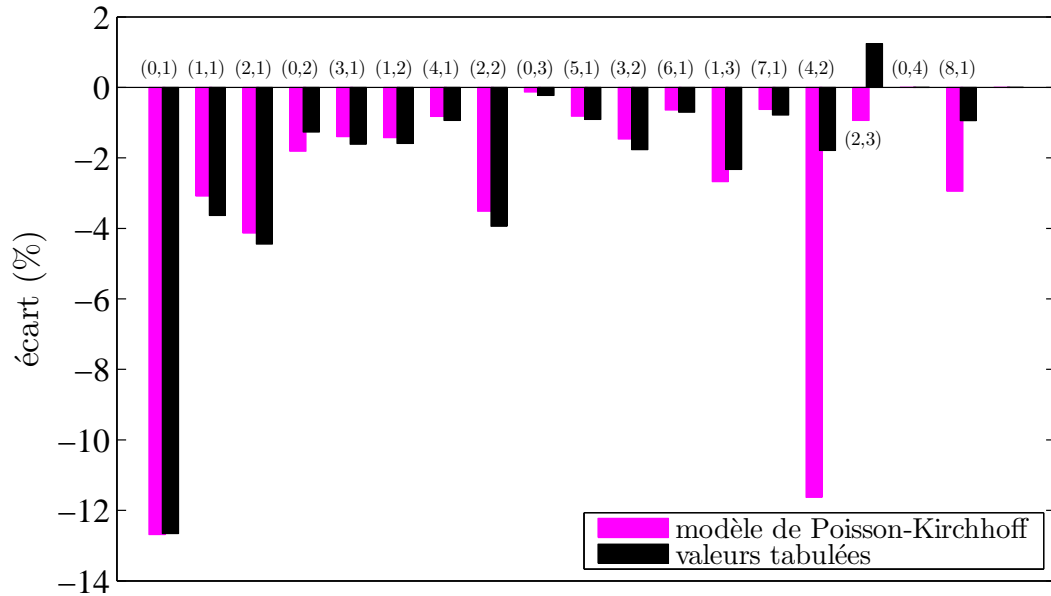


FIGURE III.31 – Ecart relatif (exprimé en %) entre les valeurs expérimentales des fréquences de résonance et celles prévues par la théorie (histogramme magenta pour le modèle de Poisson-Kirchhoff et histogramme noir pour les valeurs tabulées).

Notons par ailleurs que le modèle de Poisson-Kirchhoff colle plutôt bien avec les valeurs tabulées (entre 0.03% et 0.6% de différence) bien qu'un léger écart commence à se faire sentir aux fréquences élevées (au maximum 10 %).

Le spectre total présente également un grand nombre de résonances dont les fonctions d'ondes sont un mélange des modes de la plaque carrée (modifié par le trou partiel en son centre) et du trou seul. Quelques exemples sont présentés dans la figure III.32.

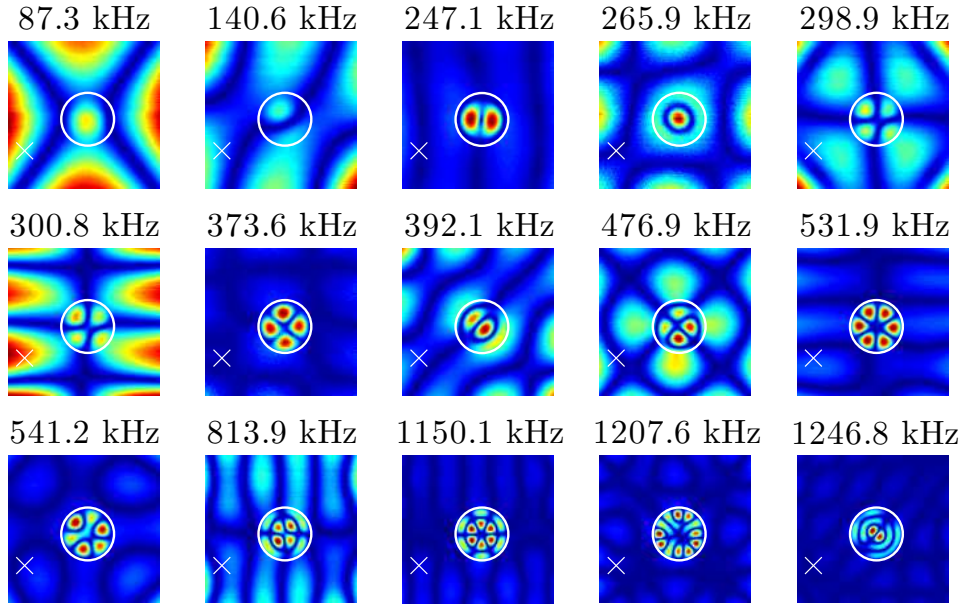


FIGURE III.32 – Exemples de modes couplés plaque carrée/trou. La source et le diffuseur sont respectivement repérés par une croix blanche et un cercle blanc.

III.7.2.3 Levées de dégénérescence des modes

La majorité des modes du diffuseur illustrés dans la figure III.29 présente une ou plusieurs distributions identiques mais avec une orientation différente. Quelques exemples exhibant deux ou trois levées de dégénérescence sont présentés dans la figure III.33. A première vue, il est difficile d’observer un comportement universel : le nombre de levées est variable, certains modes semblent arbitrairement tournés, d’autres alignés sur les axes de symétrie du réseau cristallin ou encore sur la position de la source. La richesse de ces observations, et ce ne sont là que quelques exemples, rend la compréhension de ce phénomène de levées de dégénérescence délicate. Néanmoins, nous verrons plus loin que des simulations numériques permettent de mieux comprendre et d’expliquer en partie l’origine de ces observations.

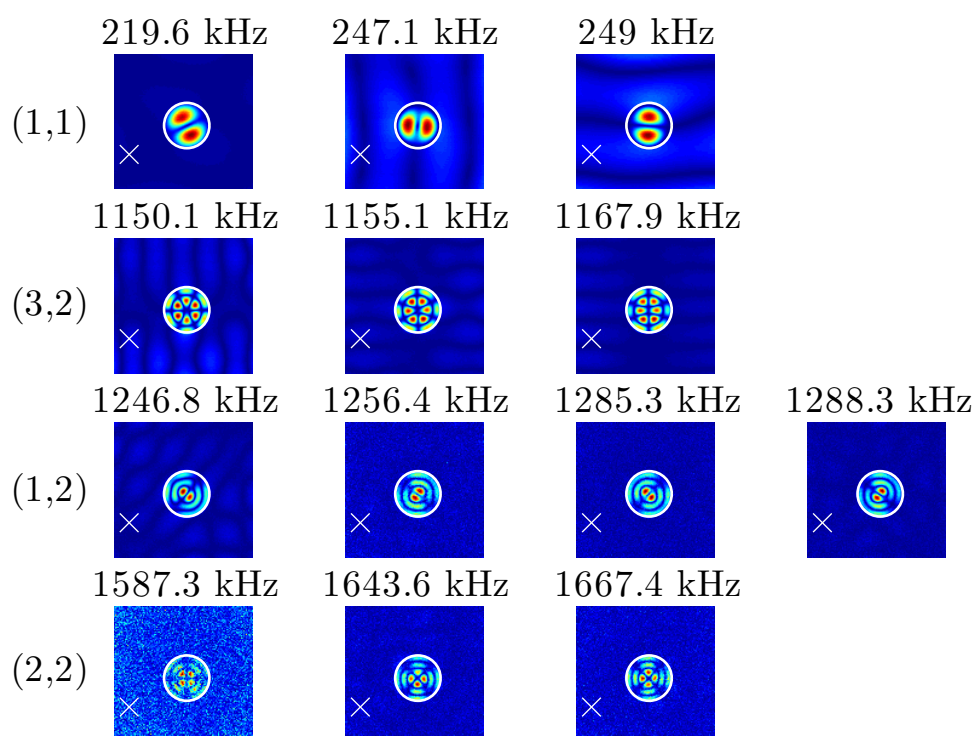


FIGURE III.33 – Exemples de levées de dégénérescence multiples pour les modes (1,1), (3,2), (1,2) et (2,2).

III.7.2.4 Phénomène de piégeage de résonances

Le phénomène de piégeage de résonance a été introduit dans le cadre de l'étude des systèmes quantiques ouverts [124]. Il intervient en cas de recouvrement important des états de résonances et provoque une redistribution des largeurs de résonance à travers les canaux de perte du système. Ces derniers matérialisent le couplage du milieu avec l'extérieur qui, dans notre cas, correspond au couplage de l'échantillon avec l'air environnant. Certaines résonances peuvent donc se retrouver élargies par rapport à leurs voisines, ce qui correspond à l'alignement du mode correspondant avec les canaux de pertes.

Ce phénomène a été observé expérimentalement pour la première fois il y a une dizaine d'années dans une cavité micro-ondes couplée à l'extérieur par un guide d'ondes à ouverture variable [125].

Dans notre expérience, le piégeage de résonance apparaît clairement à deux endroits, comme l'illustrent les figures III.34 et III.35. Ces positions particulières correspondent à des configurations pour lesquelles on a un recouvrement d'un mode du trou et d'un mode de la plaque environnante. Le spectre présenté à gauche montre la redistribution des largeurs spectrales qui s'est opérée : on observe un élargissement de la résonance de droite qui correspond à un mode du trou. En effet, ce dernier offre une "porte de sortie" à l'énergie grâce au fort couplage local avec l'air environnant qui joue le rôle d'un canal de perte. En revanche, la résonance de gauche subit un rétrécissement. Elle correspond au mode "mixte" pour lequel le champ est plus uniformément réparti dans tout le système.

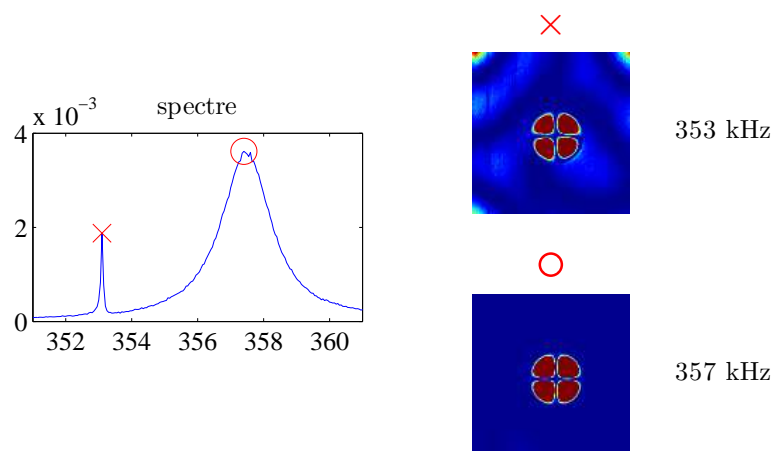


FIGURE III.34 – Piégeage de résonance autour de 590 kHz. Les images des modes ont été volontairement saturées à 5% de leur valeur maximale.

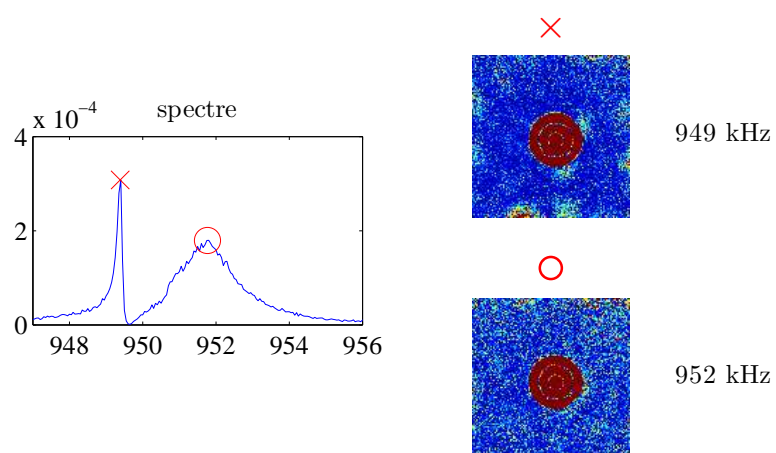


FIGURE III.35 – Piégeage de résonance autour de 950 kHz. Les images ont été saturées à 0.5% de leur valeur maximale.

III.7.2.5 Modes chaotiques

Notre système, de par sa géométrie, se rapproche de la configuration du billard de Sinaï (carré + obstacle circulaire en son centre) qui présente naturellement une dynamique chaotique. La forme de certaines fonctions d'ondes hors obstacle observées précédemment présente une certaine régularité, du fait des symétries restantes. En revanche, d'autres fonctions d'ondes du système portent la signature du chaos. En particulier, certains modes du trou présentent des dissymétries non prévues par la théorie (cf. figure III.36). Le comportement hors trou est également intéressant puisque certaines fonctions d'onde sont localisées sur une portion de la plaque carrée. Le cas le plus révélateur de la figure III.36 se situe à 1514 kHz. Cette distribution localisée fait penser aux modes "scar"ⁿ dans les cavités chaotiques où l'onde concentre une part importante de son énergie sur une orbite périodique instable de la cavité.

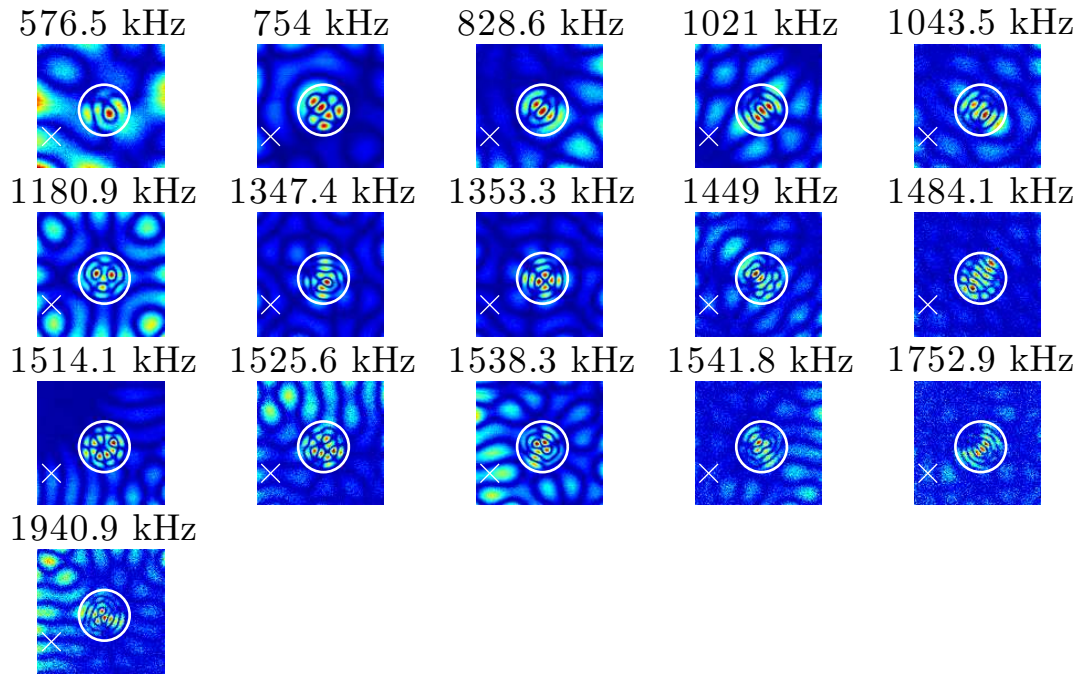


FIGURE III.36 – Modes de type chaotique. La source et le diffuseur sont respectivement repérés par une croix blanche et un cercle blanc.

ⁿ. Les modes "scar", qui constituent le squelette de la dynamique chaotique, brisent l'ergodicité spatiale des modes de type "speckle", majoritaires dans les cavités chaotiques [84]

III.7.3 Résolution numérique par FDTD

La méthode exacte tridimensionnelle évoquée plus tôt demeure loin de la réalité expérimentale et ce, malgré sa complexité. En particulier, elle ne prend pas en considération le caractère anisotrope de la propagation des ondes élastiques dans nos plaques de silicium et concerne un milieu d'extension latérale infinie. Le modèle numérique proposé par Emmanuel Bossy (Institut Langevin, Paris), basé sur la méthode FDTD, constitue un modèle unique et performant permettant de prendre en compte tous ces éléments. Elle offre ainsi un outil performant et complet pour décrire la propagation d'une onde de flexion dans une fine plaque de silicium de dimensions finies contenant un trou non traversant. En jouant sur la géométrie du système, le positionnement du diffuseur et la position de la source, nous avons réalisé une série de simulations pour mieux comprendre l'origine des phénomènes physiques observés expérimentalement.

III.7.3.1 Principe de la méthode utilisée

La méthode de résolution numérique choisie est basée sur le schéma aux différences finies de Virieux [126, 127]. Développée dans le domaine de la géophysique, cette formulation en vitesses/contraintes permet de décrire à la fois les fluides et les solides inhomogènes anisotropes. L'implémentation de cette méthode à trois dimensions permet une modélisation efficace de la propagation du mode A_0 dans une plaque finie anisotrope contenant un trou borgne.

On trouve une description complète de l'outil de simulation dans la thèse d'E. Bossy [128], qui a lui même effectué les simulations décrites plus loin. Nous nous contenterons dans cette section de décrire le principe général de l'outil de simulation numérique.

Le schéma de Virieux repose sur la discrétisation spatio-temporelle des équations suivantes :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho(r)} \times \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_i} + a_i \quad (\text{III.57})$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = C_{ijkl}(r) \times \frac{\partial v_k}{\partial r_l} + \theta_{ij} \quad (\text{III.58})$$

où \mathbf{v} est le vecteur déplacement (dérivée temporelle du champ de déplacement \mathbf{u}), $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes, \mathbf{C} le tenseur des rigidités, ρ la masse volumique du matériau, θ_{ij} un éventuel terme source de taux de contraintes et a_i un éventuel terme source d'accélération. La première équation correspond à une reformulation du principe fondamental de la dynamique, et la deuxième à la loi de comportement élastique.

Le schéma de Virieux est basé sur une discrétisation en différences finies centrée en temps et en espace qui conduit à l'approximation des dérivées premières par le taux d'accroissement suivant :

$$\frac{\partial f(a_n)}{\partial a} = \frac{f(a_{n+1/2}) - f(a_{n-1/2})}{\Delta a} \quad (\text{III.59})$$

où f désigne le champ de vitesses ou de contraintes, a la variable d'espace ou de temps, n le nœud de la grille de discrétisation où sont calculés les champs du problème et Δa le pas de discrétisation considéré.

Notons que la stabilité de la méthode numérique impose aux différents pas de discrétisation la condition suivante :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta h}{\sqrt{N} \times c_L^{max}} \quad (\text{III.60})$$

où N est la dimension de l'espace (trois dans notre cas) et c_L^{max} la plus grande des vitesses longitudinales mises en jeu dans l'ensemble des milieux de propagation considérés. Généralement, on admet qu'une longueur d'onde doit au moins contenir 10 points de grille pour mener à des résultats satisfaisants. Mais le choix du pas spatial est également conditionné par les distances de propagation en terme de longueur d'onde sur lesquelles on désire simuler les phénomènes. La finesse du maillage sera donc à adapter à chaque cas suivant la précision recherchée pour les résultats.

Le code informatique développé par E. Bossy dans le cadre de sa thèse s'applique parfaitement à la classe de symétrie cubique à laquelle appartient le silicium. La seule hypothèse utilisée concerne la modélisation du trou borgne : comme il n'est pas possible d'implémenter des conditions bords libres sur une géométrie circulaire, l'espace libre du trou est simulé par une inclusion d'un matériau de constantes élastiques

nulles. La validité de cette approche est confirmée par la suite, par comparaison avec l'expérience.

III.7.3.2 Conditions de simulation

Les paramètres de la simulation ont été choisis de manière à ce que celle-ci soit la plus proche possible de l'expérience décrite dans la section III.7.2. Pour des raisons de simplification, la méthode numérique considère un carré ou un rectangle parfait alors que les quatre angles de la plaque carrée de l'expérience ne sont pas parfaitement droit et les cotés pas rigoureusement égaux (cf. figure III.26).

Ainsi, on considère une plaque carrée de 5.85 mm^2 , de $410 \text{ }\mu\text{m}$ d'épaisseur, de conditions aux bords libres et contenant un trou borgne de 2 mm de diamètre et dont l'épaisseur restante au fond mesure $30 \text{ }\mu\text{m}$. Les positions de la source et du centre du trou sont identiques à celles de la figure III.26 : la source, introduite par un terme de force normale, est ponctuelle et située du côté du trou borgne au point (S) de coordonnées $S_x=0.69 \text{ mm}$, $S_y=1.64 \text{ mm}$ et le trou est placé au point (T) de coordonnées $T_x=2.98 \text{ mm}$, $T_y=2.75 \text{ mm}$ ^o. L'orientation de la plaque est telle que les axes principaux de symétrie $\langle 100 \rangle$ sont suivant les diagonales du carré, les côtés étant par conséquent suivant les directions $\langle 110 \rangle$. Les constantes élastiques du matériau sont les suivantes : $C_{11}=165.6 \text{ GPa}$, $C_{12}=63.9 \text{ GPa}$, $C_{44}=79.5 \text{ GPa}$ et $\rho=2329 \text{ kg/m}^3$. Ces constantes correspondent aux vitesses des ondes de volume longitudinales suivantes : suivant les directions $\langle 100 \rangle$ $c_L=8432 \text{ m/s}$ et suivant les directions $\langle 110 \rangle$ $c_L=9133 \text{ m/s}$.

Le pas temporel de la simulation est de 0.6 ns . Il est conditionné par le pas spatial, dont la valeur de $10 \text{ }\mu\text{m}$ a été choisie de façon à produire des temps de calcul "raisonnables" (de l'ordre d'une quinzaine de jours). A titre indicatif, un pas spatial de $5 \text{ }\mu\text{m}$ aurait multiplié les temps de calcul par un facteur 16!

Les signaux reçus sont des mesures de vitesse de déplacement normal, échantillonnées spatialement sur une grille de $118 \times 118 \times 42$ points, avec une résolution de $50 \text{ }\mu\text{m}$ dans le plan de la plaque et $10 \text{ }\mu\text{m}$ suivant l'épaisseur. L'échantillonnage fréquentiel de

^o. en prenant comme origine le coin inférieur gauche du carré

ces derniers est fait à 8.2 MHz (soit $1/200^{\text{ème}}$ de la fréquence de calcul).

III.7.3.3 Résultats et comparaison avec les expériences

Notons que l'interprétation des résultats du modèle numérique et la comparaison avec les expériences supposent de prendre en compte les paramètres de simulation suivants :

- la plaque est rigoureusement carrée
- le fond du trou est plat
- ce dernier n'est maillé qu'avec 3 points en épaisseur. Il en résulte une modélisation peu précise dans le fond du trou. Les fréquences de résonance du trou ne peuvent donc pas être prédites avec exactitude par les simulations numériques.

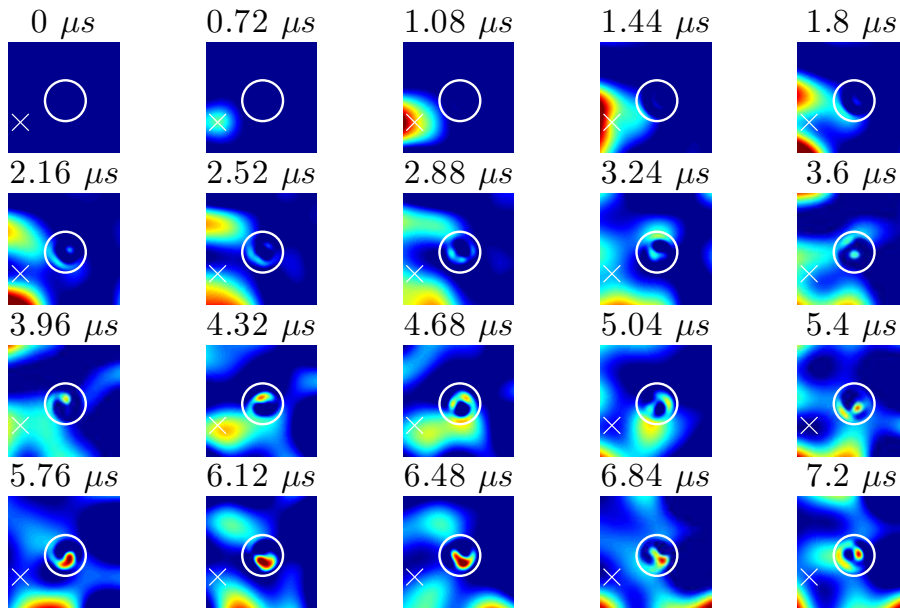


FIGURE III.37 – Premières microsecondes de la dynamique du champ de déplacement transversal obtenue par simulation numérique. La source et le diffuseur sont respectivement repérés par une croix blanche et un cercle blanc.

III.7.3.3.1 Étude dynamique

Pour obtenir la dynamique du champ de déplacement, on intègre les signaux de vitesse de déplacement de la simulation par rapport à la variable temps. Le résultat de la figure III.37, comparable à la dynamique expérimentale de la figure III.27, illustre l'évolution temporelle du champ de déplacement au cours des premières microsecondes. La dynamique simulée est relativement proche de celle observée expérimentalement. Qualitativement, on retrouve des comportements analogues : les premiers instants où l'onde suit les bords de la plaque, la dynamique à l'intérieur du trou et le transfert d'énergie entre le diffuseur et la plaque environnante.

III.7.3.3.2 Étude modale

La démarche entreprise pour réaliser l'étude modale est identique à celle effectuée expérimentalement en réalisant une transformée de Fourier de chacun des signaux temporels.

En se focalisant sur les modes dominés par le trou, on retrouve en simulation la quasi-totalité des modes observés expérimentalement. Ces observations permettent dans un premier temps de valider le choix de modélisation du trou borgne par une inclusion de constantes élastiques nulles.

Les modes qui sont en parfaite correspondance sont représentés dans la figure III.38, sur laquelle l'écart entre les fréquences de résonance de la simulation et celles obtenues expérimentalement sont indiquées dans chaque cas. Hormis la première fréquence de résonance très proche du cas expérimental, on peut dire que les simulations numériques sous-estiment les fréquences de résonance expérimentales d'environ 10 %, presque indépendamment de la fréquence. Un meilleur accord sur les fréquences serait sans doute obtenu pour un pas spatial inférieur à celui de 10 μm utilisé dans la simulation, et pour un modèle prenant en compte le caractère non plat du fond du trou. Notons au passage la succession des modes (4,2) et (7,1) (respectivement 1319 kHz et 1324 kHz dans la figure) qui, tout comme le cas expérimental, est inversée par rapport aux prédictions des résonances de la plaque circulaire encastree (cf. section III.4) .

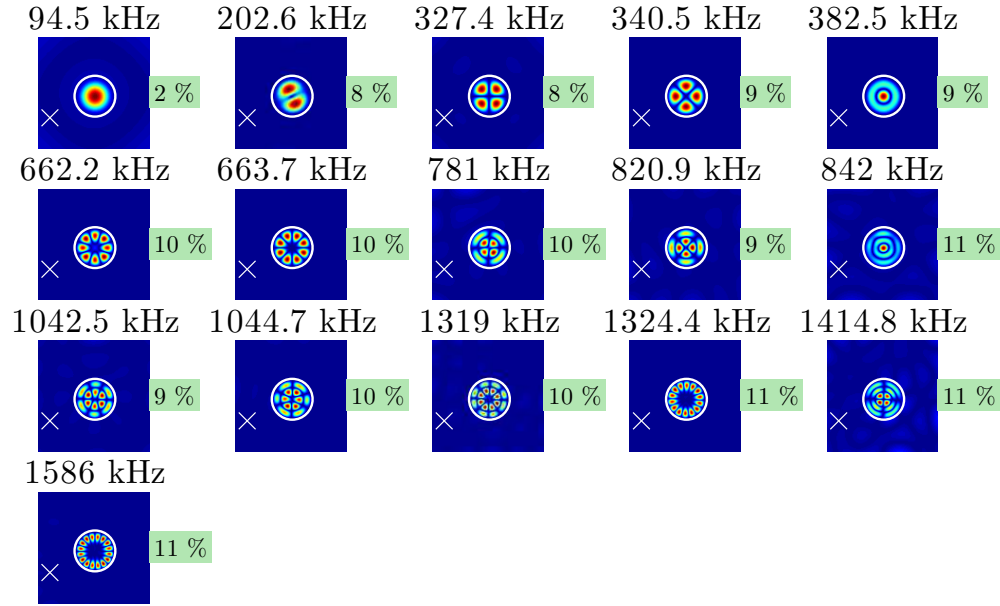


FIGURE III.38 – Modes de la simulation qui correspondent parfaitement aux modes de l'expérience. L'écart (%) entre la fréquence de résonance de la simulation et le cas expérimental est indiqué sur chaque figure.

La sous-estimation des fréquences de résonance implique d'autre part la présence de 4 modes supplémentaires par rapport au cas expérimental^p.

p. en l'occurrence les modes (5,2),(3,3),(1,4) et (6,2)

Des résultats numériques préliminaires ont permis d'établir l'importance de la position de la source sur l'orientation de certains modes. En témoigne la figure III.39 qui présente les différences d'orientation de quelques modes obtenus par deux simulations pour lesquelles nous avons modifié la position de la source.

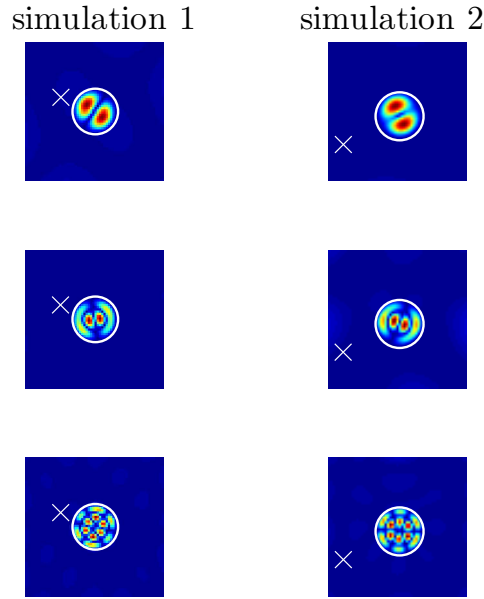


FIGURE III.39 – Influence de la position de la source sur l'orientation de quelques modes. La source est repérée par une croix blanche.

D'autre part, les différentes simulations numériques, couplées aux observations expérimentales, permettent de relever les effets de l'anisotropie du silicium sur les modes du système.

En premier lieu, l'anisotropie a une influence directe sur la forme des modes. La manifestation la plus remarquable concerne les modes axisymétriques de type $(0,m)$ (avec $m>1$). L'exemple du mode $(0,3)$ est présenté dans la figure III.40. Dans l'expérience comme dans la simulation, on voit que les cercles concentriques sont déformés le long des axes $\langle 100 \rangle$ (axes "lents")^q. Il s'agit de l'effet le plus notable de l'anisotropie sur la forme des modes.

^q. des simulations indiquent que cette déformation n'existe pas dans un milieu isotrope

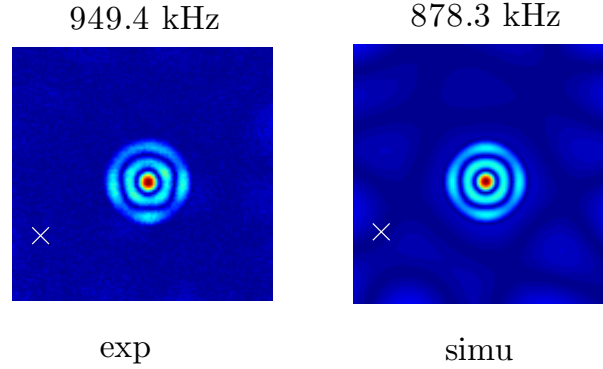


FIGURE III.40 – Déformation du mode (0,3) due à l'anisotropie du silicium. L'effet est observé expérimentalement (à gauche) et par les simulations (à droite).

Dans le cas du mode fondamental (0,1), on trouve une très faible anisotropie de seulement 0.1% contre environ 48% sur l'anneau le plus éloigné du mode (0,3). Ces valeurs s'obtiennent en comparant les modes par soustraction au même modes tournés de 45°. La même procédure appliquée aux modes (1,1) et (2,1) donnent une anisotropie de l'ordre de 1%. Les modes sont donc déformés de façon différente par les "axes lents" et les "axes rapides" du cristal.

En second lieu, l'anisotropie est à l'origine d'une levée de dégénérescence des modes^r qui entraîne une version d'un même mode tournée à 45° à une fréquence différente.

L'ensemble de ces observations numériques permet de considérer les effets de l'anisotropie, contrairement à l'approche théorique isotrope de la plaque circulaire encastrée. Néanmoins, une compréhension complète des levées de dégénérescences et des changements d'orientation suppose l'analyse de nombreux résultats de plusieurs simulations qui n'ont à ce jour pas été encore toutes réalisées.

r. autres que les modes axisymétriques (0,m).

III.8 Conclusion et perspectives

Nous avons abordé au cours de ce chapitre le problème de la diffusion d'une onde de Lamb antisymétrique fondamentale A_0 par un trou non traversant. L'asymétrie de cet élément vis-à-vis du feuillet moyen de la plaque implique des phénomènes complexes de conversion entre les différentes familles de modes (symétriques et antisymétriques) qui se propagent dans le système. Il est donc nécessaire de faire appel à des modèles adéquats pour décrire chacun de ces types de déformation. Après avoir exposé les différentes théories existantes, nous avons opté pour les modèles simplifiés des plaques de Poisson et Kirchhoff pour décrire respectivement les mouvements dans le plan (dus à S_0, SH_0) et les mouvements de type flexion (lié à A_0). La combinaison de ces modèles présente des résultats fiables vis-à-vis de la théorie tridimensionnelle exacte dans nos gammes de faibles produits {fréquence \times épaisseur}.

Dans un deuxième temps, nous avons présenté des expériences de diffusion par un trou borgne dans des plaques de silicium. Les modes du diffuseur correspondent à ceux d'une plaque circulaire encastrée d'épaisseur égale à la matière restant au fond du trou. Cette approche constitue une bonne approximation pour déterminer les fréquences de résonance du diffuseur, bien qu'elle ne soit valable que pour un milieu isotrope. Les effets subtils de l'anisotropie ont été finement révélés par l'outil numérique FDTD développé par E. Bossy. On a vu en particulier que la forme des modes axisymétriques de type $(0,m)$ étaient significativement affectée suivant les différents axes principaux du cristal ("axes lents" suivant les diagonales et "axes rapides" suivant les côtés de la plaque carrée). L'anisotropie est également à l'origine d'une levée de dégénérescence des modes impliquant un changement d'orientations à 45° d'un même mode à des fréquences différentes. A celle-là peut s'ajouter aussi un dédoublement de ces modes par couplage avec des modes non dégénérés de la plaque environnante qui proviennent des dissymétries matérielles du système (excentricité du trou ou plaque non carrée). La position de la source semble jouer également un rôle important sur l'orientation de certains modes. Néanmoins une compréhension totale de l'ensemble de ces phénomènes nécessite de réaliser des études numériques complémentaires qui n'ont pas encore été réalisées [129].

D'autre part, contrairement au trou perçant^s, le trou borgne présente des résonances piquées qui correspondent aux fréquences propres de l'épaisseur de matériau restante au fond du diffuseur, équivalente localement à une fine plaque circulaire au bord encastré. Le caractère résonant de cet élément lui confère un pouvoir de diffusion important au niveau de ces fréquences propres. C'est ce dernier point qui a motivé le choix de ce type de diffuseur, dans l'optique de l'observation du phénomène de localisation d'Anderson en milieu fortement désordonné. Ainsi, le trou borgne résonant constitue une brique élémentaire de système plus complexe contenant une distribution aléatoire de trous borgnes. Ces milieux multiplement diffusants feront l'objet du chapitre suivant.

Par ailleurs, la propriété remarquable du trou borgne de résonner à des fréquences d'autant plus faibles que ce dernier est profond ouvre des perspectives prometteuses dans le domaine en plein essor des métamatériaux acoustiques. Ces matériaux artificiels peuvent présenter des propriétés élastiques effectives exotiques telles qu'une densité et un module d'Young négatifs. Une des conditions nécessaires à l'obtention de telles spécificités est de disposer de résonateurs dont la taille est inférieure à la longueur d'onde, assurant ainsi une homogénéisation apparente de la structure (cf. [130]). Le trou borgne, de par sa simplicité^t, est un bon candidat pour jouer le rôle de super-résonateur dans ces méta-structures à condition de présenter une épaisseur de fond de trou suffisamment fine. Le cas échéant, il est possible de disposer d'une forte densité de résonateurs couplés de manière évanescente dans un volume réduit. Les applications possibles concernent les effets spectaculaires de réfraction négative ou le pendant de la cape d'invisibilité électromagnétique [132] pour les ondes de flexion [133].

s. tout du moins pour nos gammes de fréquences expérimentales basses

t. en comparaison avec d'autres types de résonateurs tels que les résonateurs en anneaux fendus introduits en électromagnétisme par John Pendry [131]

Chapitre IV

Diffusion multiple en milieu désordonné

Sommaire

IV.1 Introduction et motivations	172
IV.2 Généralités sur la diffusion multiple en milieux désor- donnés	175
IV.2.1 Longueurs caractéristiques du problème	175
IV.2.2 Les différents régimes de propagation en milieu diffuseur .	176
IV.3 Élaboration du système désordonné	177
IV.4 Étude expérimentale	182
IV.4.1 Conditions de l'expérience	182
IV.4.2 Résultats préliminaires	185
IV.4.3 Étude dynamique	189
IV.4.4 Étude modale	191
IV.5 Conclusion et perspectives	198

IV.1 Introduction et motivations

Ce dernier chapitre traite de la diffusion multiple des ondes de Lamb en milieux désordonnés. Lorsque ces derniers sont très diffusifs, la propagation et la diffusion des ondes peuvent être ralenties et l'onde peut se retrouver piégée dans une région finie de l'espace. Ce phénomène dit de "localisation forte", qui résulte des interférences entre ondelettes multiplement diffusées par le désordre a été proposé par P.W Anderson [134] en 1958 pour expliquer la transition métal-isolant dans les fils métalliques.

La localisation d'Anderson est un phénomène purement ondulatoire puisqu'il est lié aux interférences entre les différentes ondes multiplement diffusées par le désordre. C'est donc naturellement que son étude s'est étendue aux ondes classiques, sous l'impulsion des travaux réalisés dans les cristaux photoniques par S. John il y a près de 30 ans [135]. Depuis, la quête pour l'observation expérimentale de la localisation d'Anderson a vu naître une quantité considérable d'études, que ce soit dans le domaine de l'optique [136,137], des micro-ondes [138,139] ou encore des ondes acoustiques [140–142]. On trouve d'excellentes revues sur les réalisations expérimentales marquantes [143–145] ou sur les principes fondamentaux et les aspects théoriques de la localisation d'Anderson [146,147].

Les travaux expérimentaux concernant la localisation forte des ondes élastiques ne sont pas légions. Les premières observations marquantes dans le domaine de l'élastodynamique sont à mettre au crédit de R. Weaver qui a observé en 1990 [148] la localisation d'Anderson d'ondes élastiques dans une plaque d'aluminium contenant une centaine de rainures réalisées à la scie circulaire. Deux années plus tard, l'équipe de P. Sheng [149] rend compte de la localisation à deux dimensions d'ondes de flexions dans une plaque d'acier sur laquelle sont collés deux cents blocs résonants de PMMA ^a répartis de manière aléatoire. Ils observent un gap dans le spectre à des fréquences qui sont proches des fréquences de résonance de cisaillement des blocs diffuseurs.

a. ou verre acrylique, plus connu sous le nom commercial Plexiglass ou encore Lucite

Tout est loin d'être compris sur la localisation d'Anderson et cinquante ans après sa découverte, ce domaine de recherche est plus vivant que jamais. Il y a trois ans, Weaver et Lobkis [150] ont repris leurs travaux expérimentaux réalisés vingt ans auparavant afin de lever toute ambiguïté sur leurs résultats initiaux. La même année, l'équipe expérimentale canadienne de J. Page et l'équipe grenobloise de B. van Tiggelen [151] ont présenté dans le cadre d'une collaboration une étude expérimentale qui révèle la localisation forte d'ondes élastiques dans un réseau tridimensionnel aléatoire composé de billes d'aluminium. Ils présentent plusieurs caractéristiques (dynamique anormale, confinement spatial, fluctuations non gaussiennes, fonction d'onde multi-fractale...) qui permettent d'affirmer sans équivoque qu'ils se trouvent dans un régime localisé. Ces efforts spécifiques visent à exclure l'ambiguïté qui peut exister entre la localisation d'Anderson des ondes classiques et les phénomènes d'absorption dans la mesure où ils impliquent tous deux une décroissance exponentielle du champ transmis sur la longueur de l'échantillon. Cette distinction peut être faite si l'étalement spatial caractéristique du mode localisé, appelé longueur de localisation ξ_{loc} , est inférieur à la longueur d'absorption du milieu. Mais cette dernière est en pratique difficile à quantifier.

D'autre part, une des approches proposées pour diminuer la longueur de localisation, et ainsi être dans un régime localisé, consiste à tirer profit des **résonances** internes des diffuseurs. La section efficace de diffusion d'un diffuseur augmente brutalement aux fréquences de résonances internes, on s'attend alors à observer une diminution conséquente de ξ_{loc} à ces positions. De nombreuses études numériques et expérimentales ont montré que la localisation d'Anderson était légèrement décalée en fréquence par rapport aux résonances des diffuseurs. Citons par exemple les travaux de A. Chabanov et A. Genack [152] sur la localisation des micro-ondes dans un guide d'onde contenant des sphères d'alumines ou encore les travaux numériques réalisés en acoustique par l'équipe de Z. Ye [142, 153–155] dans des liquides contenant des bulles d'air résonantes. Dans ces deux cas, la localisation d'Anderson est observée à des fréquences légèrement supérieures aux résonances individuelles des diffuseurs. Par ailleurs, l'approche qui consiste à mettre le plus de diffuseurs efficaces possible dans un milieu pour observer la localisation forte est remise en cause dans une étude de van Tiggelen *et. al* [156]. Ils montrent en particulier que

dans ces conditions de fort couplage entre les diffuseurs, la possibilité que l'onde rencontre plusieurs fois le même diffuseur^b est défavorable à l'observation de la localisation. Une étude numérique plus récente de C. Vanneste et P. Sebbah [157] s'intéresse au rôle des résonances de "Mie" de diffuseurs cylindriques diélectriques sur la localisation d'Anderson. Il montrent que l'usage de diffuseurs de même taille (présentant donc les mêmes résonances) est, de part un effet collectif, favorable à la localisation. Cette dernière est observée à une fréquence significativement différente des résonances individuelles des diffuseurs lorsque la densité d'hétérogénéités est importante. Ainsi, la question concernant le rôle précis des résonances internes des diffuseurs dans l'observation de la localisation forte demeure une question ouverte.

L'objectif de ce dernier chapitre est de proposer le diffuseur résonant présenté dans le chapitre précédent comme cellule élémentaire d'un système désordonné pouvant être le siège de modes localisés au sens d'Anderson. Nous avons vu que la section efficace de diffusion du trou borgne, autrement dit son pouvoir diffusant, augmentait brutalement aux résonances internes du diffuseur. S'ils présentent tous la même résonance, on peut espérer un effet collectif des diffuseurs qui exacerbe les effets du désordre. De plus, sa capacité à résonner à basse fréquence permet de disposer d'un grand nombre de diffuseurs dans une petite surface, ce qui est à priori favorable à la localisation. Nous estimerons dans un premier temps les paramètres géométriques du milieu désordonné qui nous permettront d'être dans un régime de localisation forte. Nous allons ensuite tirer partie des performances du dispositif expérimental décrit dans le chapitre I pour étudier les différents régimes de diffusion des ondes de Lamb dans une plaque de silicium contenant une forte concentration de trous borgnes.

b. ils nomment ce phénomène le "dependent scattering"

IV.2 Généralités sur la diffusion multiple en milieux désordonnés

IV.2.1 Longueurs caractéristiques du problème

Dans les régimes de diffusion multiple, les différentes échelles de longueur à prendre en compte sont les suivantes :

- la longueur caractéristique du système L
- le libre parcours moyen élastique l_e dans le milieu
- l'échelle de la longueur d'onde λ

La définition du libre parcours moyen élastique l_e provient de la loi de décroissance de l'intensité transmise moyenne, appelée loi de Beer-Lambert, qui à 1D s'écrit comme suit : $I = I_0 e^{-x/l_e}$ où x représente la distance parcourue par l'onde et I_0 l'intensité de l'onde avant diffusion. l_e caractérise le degré de désordre du milieu : plus sa valeur est grande, plus le désordre est "faible". Dans le cadre de l'Independent Scattering Approximation (ISA) [158], ou approximation des milieux dilués, une estimation du libre parcours moyen élastique est donnée par la relation suivante :

$$l_e = \frac{1}{N\sigma_{scat}} \quad (\text{IV.1})$$

où N est la densité surfacique de diffuseurs (en m^{-2}) et σ_{scat} la section efficace de diffusion d'un diffuseur (en m).

Notons que généralement le libre parcours moyen élastique l_e est à distinguer du libre parcours moyen de transport l^* qui représente la distance au bout de laquelle l'onde a perdu toute information sur sa direction de propagation initiale. l^* est lié à l_e par un facteur qui dépend de l'anisotropie de la diffusion par un diffuseur. Lorsque la diffusion est très anisotrope, ces deux grandeurs peuvent différer d'un ordre de grandeur [159]. Dans notre cas, on s'intéressera particulièrement à la première résonance du trou borgne, qui présente une section de diffusion isotrope. La distinction entre l_e et l^* sera donc accessoire.

IV.2.2 Les différents régimes de propagation en milieu diffuseur

C'est la valeur du libre parcours moyen l_e relativement à la taille du système L et à la longueur d'onde λ qui va déterminer dans quel régime de propagation on se situe. La figure IV.1 indique les différents régimes de propagation pour différents degrés de désordre.

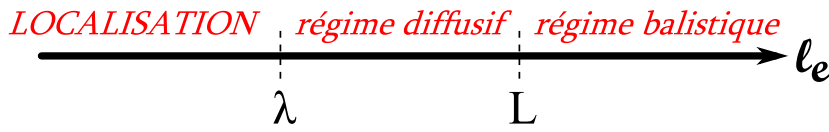


FIGURE IV.1 – Les différents régimes de propagation suivant la valeur du libre parcours moyen élastique l_e . L constitue la dimension caractéristique du système.

Lorsque le désordre est faible ($l_e > L$), l'onde n'est que très peu diffusée et va se propager quasi-librement avec une vitesse renormalisée par l'indice du milieu : c'est le **régime balistique**. Pour un milieu dont le niveau de désordre est tel que $\lambda < l_e < L$, la propagation des ondes suit un **régime diffusif**. Au delà de quelques libres parcours moyens, l'onde balistique s'est éteinte^c, la majeure partie de l'énergie s'étant transférée aux ondes diffuses. Le transport est dit *incohérent* et les ondes suivent une marche aléatoire. Dans des régimes extrêmes de fort désordre ($l_e \leq \lambda$), le transport de l'onde devient *cohérent*. Ainsi, les interférences entre les ondes multiple-ment diffusées par les hétérogénéités sont possibles et l'onde peut se retrouver piégée dans une région finie de l'espace : c'est le régime de **localisation d'Anderson** ou localisation forte. Un mode localisé présente une décroissance spatiale exponentielle en $e^{-L/\xi_{loc}}$ où la longueur de localisation ξ_{loc} caractérise l'étalement du mode.

Pour un milieu unidimensionnel, la longueur de localisation est égale au libre parcours moyen. La longueur de localisation d'un système bidimensionnel est donnée par l'expression suivante :

$$\xi_{loc} = l_e e^{(\pi k l_e / 2)} \quad (\text{IV.2})$$

c. C'est la raison pour laquelle le libre parcours moyen élastique porte également le nom de longueur d'extinction.

Cette dernière n'est valable que dans l'approximation des milieux dilués qui néglige toute interaction entre les diffuseurs. Skipetrov *et al.* [160] donnent une expression de ξ_{loc} à trois dimensions :

$$\xi_{loc} = \frac{6l_e(kl_e)^2}{1 - (kl_e)^4} \quad (\text{IV.3})$$

La théorie d'échelle proposée en 1979 par le "gang des quatre" [161] prédit l'existence d'une transition entre états étendus (régime diffusif) et états localisés dans un milieu infini de dimension 3 ou supérieure. Cette transition est atteinte lorsque $k.l_e \lesssim \text{constante} \sim 1$. Cette condition, appelée critère de Ioffe-Regel, n'est pas universelle dans le sens où la constante peut varier d'un modèle à l'autre (usuellement on se ramène à 1 [147]). Notons que cette transition n'existe que pour des milieux infinis de dimension supérieure à 2. En effet, pour des systèmes désordonnés unidimensionnels ou bidimensionnels de taille infinie, tous les états sont localisés, quelle que soit la nature du désordre.

La condition d'observation expérimentale du phénomène dans un milieu de taille finie implique que la longueur de localisation ξ_{loc} soit inférieure à $L/2$ (dans le cas où la source est au centre d'un milieu de taille L). Pour un disque de rayon R , semblable à nos wafers de silicium, cette condition devient : $\xi_{loc} < R$. Notons que l'observation de la localisation à 2D est plus difficile qu'à 1D dans la mesure où la longueur de localisation varie de manière exponentielle en fonction du libre parcours moyen, la rendant plus sensible à une variation de l_e .

IV.3 Élaboration du système désordonné

L'objet de cette section est de montrer les tendances d'évolution de l_e et ξ_{loc} en fonction des paramètres géométriques du milieu et d'estimer ainsi les configurations du désordre qui nous permettront d'être dans un régime de localisation forte. Ces estimations sont réalisées dans l'approximation des milieux dilués à partir de la section efficace de diffusion d'un trou borgne déduite du modèle de Poisson-Kirchhoff^d.

d. cf. chapitre précédent

Cette étude se déroule en trois étapes :

- on calcule la section efficace d'un diffuseur σ_{scat} par le modèle de Poisson-Kirchhoff
- on en déduit le libre parcours moyen l_e grâce à la relation IV.1, pour un nombre de diffuseurs donné
- grâce à la relation (IV.2), on estime la longueur de localisation ξ_{loc} , qui doit être inférieure à R , le rayon du cercle qui contient le désordre

La figure IV.2 présente l'évolution pour deux valeurs du paramètre b/h des grandeurs σ_{scat} , $k.l_e$ et ξ_{loc} pour une forte concentration de diffuseurs (fraction surfacique $\Phi = 0.44$) de 1 mm de rayon. Elle indique clairement qu'une fine épaisseur du fond des trous (rapport b/h petit) favorisera l'occurrence de modes localisés. La condition $\xi_{loc} < R$ est vérifiée dans les deux cas^e. Cette tendance se confirme pour d'autres valeurs de b/h .

D'autre part, la manière dont ces grandeurs évoluent pour différentes valeurs du rayon du trou est illustrée dans la figure IV.3 où les courbes en trait plein correspondent à un trou de 1 mm de rayon et les courbes en tirets à un trou de 1.5 mm de rayon. Les valeurs de $k.l_e$ et ξ_{loc} ont été obtenues pour la même fraction surfacique de trous que précédemment, à savoir $\Phi = 0.44$. On voit que notre approche prévoit de meilleures conditions de localisation pour le trou le plus petit. Cette configuration présente en outre l'avantage d'atteindre un nombre de diffuseurs plus élevé que dans le cas où ils ont un diamètre supérieur. Cependant, une forte densité de diffuseurs implique un couplage entre eux qui nous fait sortir du cadre de l'hypothèse des milieux dilués, ce qui peut remettre en cause notre approche.

e. dans nos échantillons de silicium de 4 pouces, la zone inscriptible correspond à un disque de 9 cm donc $R=4.5$ cm

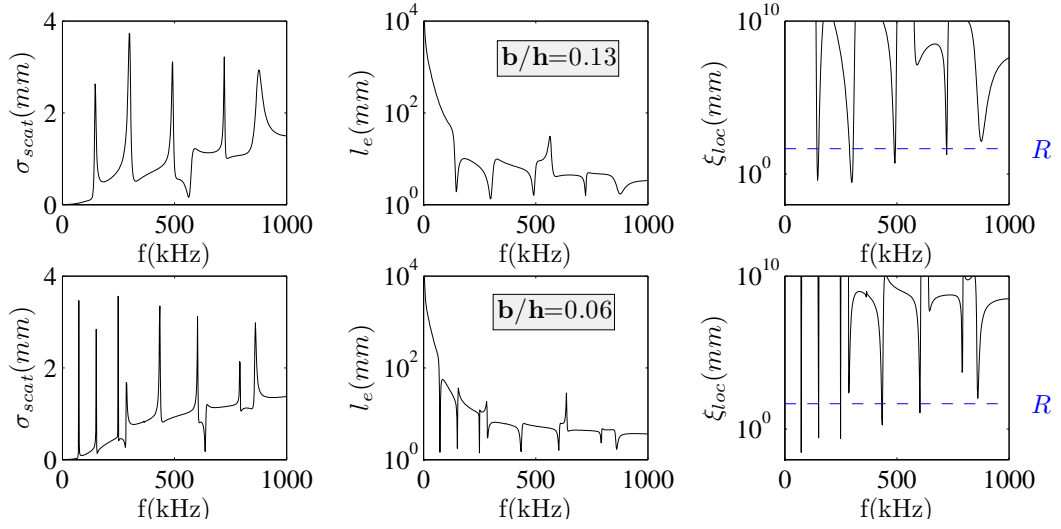


FIGURE IV.2 – Evolution de la section efficace de diffusion σ_{scat} , du libre parcours moyen l_e et de la longueur de localisation ξ_{loc} pour deux valeurs du produit b/h . La ligne bleue en pointillé indique la position du rayon du wafer. Ces courbes ont été obtenues dans l'approximation des milieux dilués pour une distribution aléatoire de trous borgnes de 1 mm de rayon et dont la fraction surfacique est de 44%.

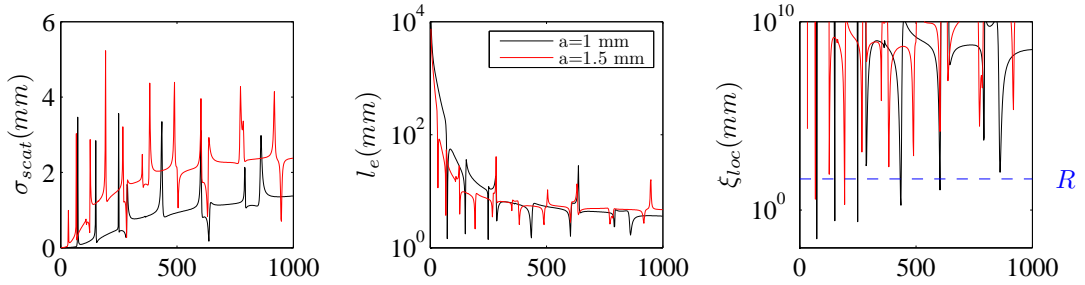


FIGURE IV.3 – Evolution de la section efficace de diffusion σ_{scat} , du libre parcours moyen l_e et de la longueur de localisation ξ_{loc} pour deux valeurs du rayon des diffuseurs. La ligne bleue en pointillé indique la position du rayon du wafer. Ces courbes ont été obtenues dans l'approximation des milieux dilués pour une collection de trous borgnes profonds de $280 \mu\text{m}$ répartis aléatoirement dans une plaque de $300 \mu\text{m}$ d'épaisseur. La fraction surfacique des diffuseurs est de 44%.

A partir de ces estimations nous avons élaboré plusieurs configurations de désordre avec différentes concentrations et tailles des diffuseurs. Trois d'entre elles sont présentées dans la figure IV.4.

Après avoir proposé ces différentes configurations au Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes (le LAAS), chargé de réaliser nos échantillons, une seule d'entre elles nous a été fournie. Il s'agit de la configuration "M3" présentée au bas de la figure IV.4. Elle correspond à une collection de 3467 diffuseurs de 1 mm de diamètre répartis aléatoirement et occupant une fraction surfacique d'environ 43%. Ils sont disposés sur une zone de 9 cm de diamètre correspondant à la zone de gravure technologiquement réalisable sur un wafer de 4 pouces. Une distance d'exclusion de 100 μm est assurée entre les trous (de bord à bord) pour éviter que ces derniers ne coalescent^f.

Remarque : la configuration retenue par le LAAS correspond à une forte concentration de diffuseurs. La distance minimale qui sépare les trous vaut 100 μm , ce qui est largement inférieur à la longueur d'onde de 3 mm qu'on trouve aux alentours de la fréquence de résonance fondamentale des diffuseurs. Dans ces conditions, on ne peut plus négliger l'influence des trous entre eux et on sort du cadre de l'approximation des milieux dilués. La relation IV.1 donnant le libre parcours moyen n'est en particulier plus valable et au lieu de décroître avec la densité de diffuseurs, l_e augmente. Ces cas de fortes concentrations ne sont donc pas nécessairement favorables à la localisation d'Anderson. Néanmoins, nous verrons que les résultats expérimentaux obtenus dans cet échantillon sont très proches d'un état de localisation forte.

f. la distance d'exclusion induit des corrélations à courte portée

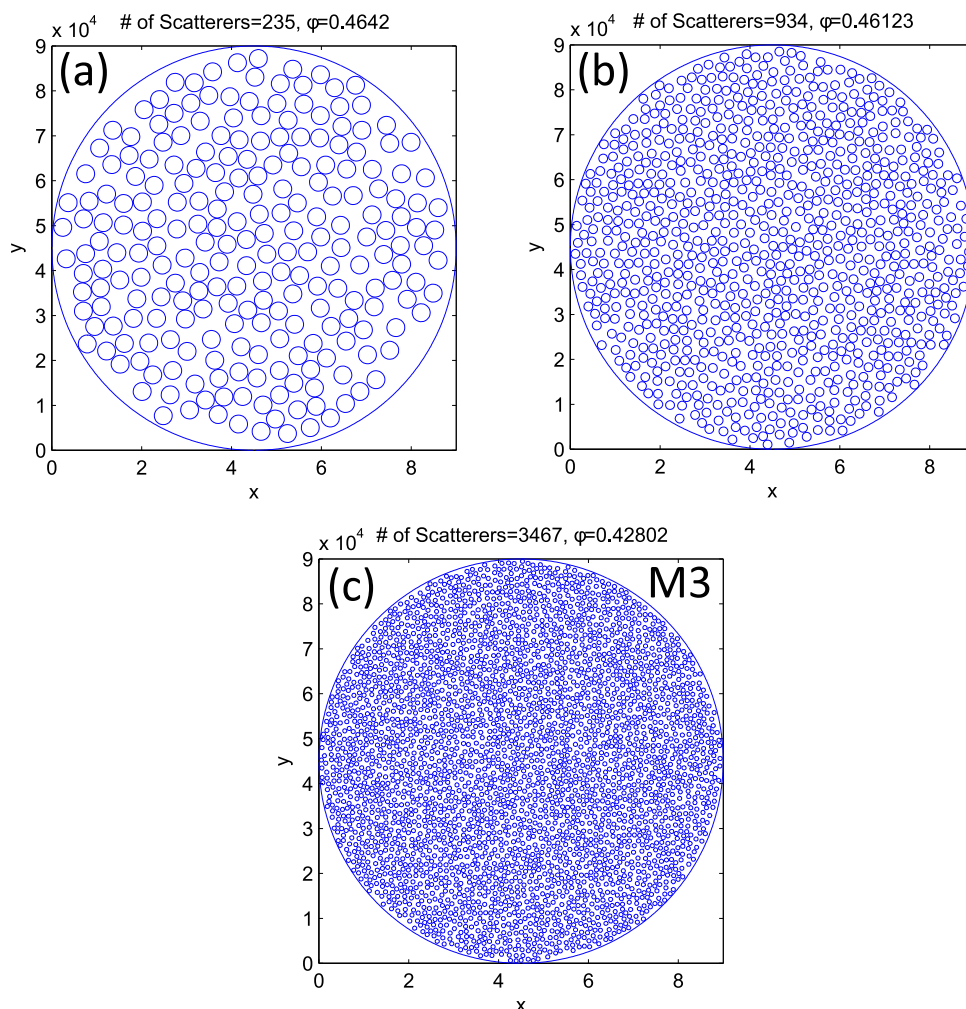


FIGURE IV.4 – Exemples de configurations de désordre générées à partir de l’extension du modèle de Poisson-Kirchhoff. (a) : une distribution aléatoire de 235 diffuseurs de 2 mm de rayon, (b) : 934 diffuseurs de 1 mm de rayon et (c) : 3467 diffuseurs de 0.5 mm de rayon. Les fractions surfaciques occupées par les trous valent respectivement 47%, 46% et 43%. Le cercle de 9 cm correspond à la zone inscriptible en pratique dans les wafers de silicium de 4 pouces.

IV.4 Étude expérimentale

IV.4.1 Conditions de l'expérience

En plus de la zone inscriptible maximale de 9 cm de diamètre, les contraintes technologiques imposent les limitations suivantes : une épaisseur des wafers supérieure à 200 μm , une épaisseur de fond de trou supérieure à 20 μm .



FIGURE IV.5 – Photographie de l'échantillon "D3" réalisé par les membres du LAAS, à Toulouse. Il s'agit d'un wafer de silicium de 4 pouces, épais de 406 μm et contenant une répartition aléatoire d'environ 3400 trous borgnes d'1 mm de diamètre et profond de 380 μm .

Le système désordonné a été réalisé à partir du masque "M3" présenté dans la figure IV.4 par une méthode de gravure sèche du silicium par plasmas (cf. annexe E) développée par le LAAS à Toulouse^g. Après de longues phases d'élaboration et d'amélioration du processus de gravure, plusieurs échantillons avec la configuration "M3" nous ont été fournis avec des profondeurs de trou différentes. Nous avons choisi la plaque présentant le moins de défauts et possédant les trous borgnes les plus profonds, en l'occurrence 380 μm de profondeur. La plaque ayant une épaisseur de 406 μm , la portion de matière restant au fond du trou fait seulement 26 μm d'épais-

g. Projet PEPS 07-20 2007-2008

seur, soit deux fois mieux que ce que les limitations technologiques prévoyaient. Une photographie de l'échantillon est présentée dans la figure IV.5.

Le wafer de silicium de 4 pouces contient environ 3400 trous borgnes de 1 mm de diamètre répartis aléatoirement. Les quelques trous sombres en périphérie correspondent à des défauts de gravure (gravure pas assez profonde ou ne couvrant pas toute la surface du trou^h). La technologie utilisée impose une zone non gravée en bord d'échantillon sur un anneau d'environ 1 cm de largeur.

La section efficace de diffusion prédite par le modèle de Poisson-Kirchhoff (cf. chapitre III, paragraphe III.6.3) pour un trou de ce système est indiquée dans la figure IV.6. L'échelle des abscisses montrée correspond à la gamme de fréquence accessible expérimentalement (jusqu'à environ 1 MHz). Les deux pics présents à 380 kHz et 788 kHz correspondent aux deux premières fréquences de résonance de la matière qui reste au fond du trou. En effet, on a vu dans le chapitre précédent que l'on pouvait raisonnablement assimiler le fond du trou à une plaque fine circulaire au bord encastré. Pour une plaque circulaire clampée de 26 μm d'épaisseur, les deux premières fréquences de résonance valent respectivement 380 kHz et 791 kHz soit un accord parfait pour la première (avec la précision affichée ici) et un écart de moins de 1% pour la deuxième vis-à-vis du modèle de Poisson-Kirchhoff.

La génération ultrasonore est assurée par le transducteur de contact avec la pointe de siliceⁱ. L'impulsion envoyée par le générateur de fonction est centrée autour de 585 kHz, valeur qui a été choisie pour être proche de la fréquence de résonance fondamentale des trous borgnes proches de la zone d'excitation^j. La pointe en silice se situe approximativement au centre de l'échantillon, sur la face inférieure, entre les trous. Le petit diamètre des trous (1 mm) impose une résolution spatiale élevée de la grille de mesure. On a opté pour un pas de discrétisation spatial de 200 μm conduisant à une grille comprenant environ 245 000 points de mesure.

h. voir la partie sur les défauts de gravure dans l'annexe E

i. pour des raisons techniques, le dispositif de génération par laser n'a pas pu être utilisé à ce moment

j. nous verrons effectivement plus loin que la résonance des trous fluctue significativement suivant la zone de l'échantillon considérée

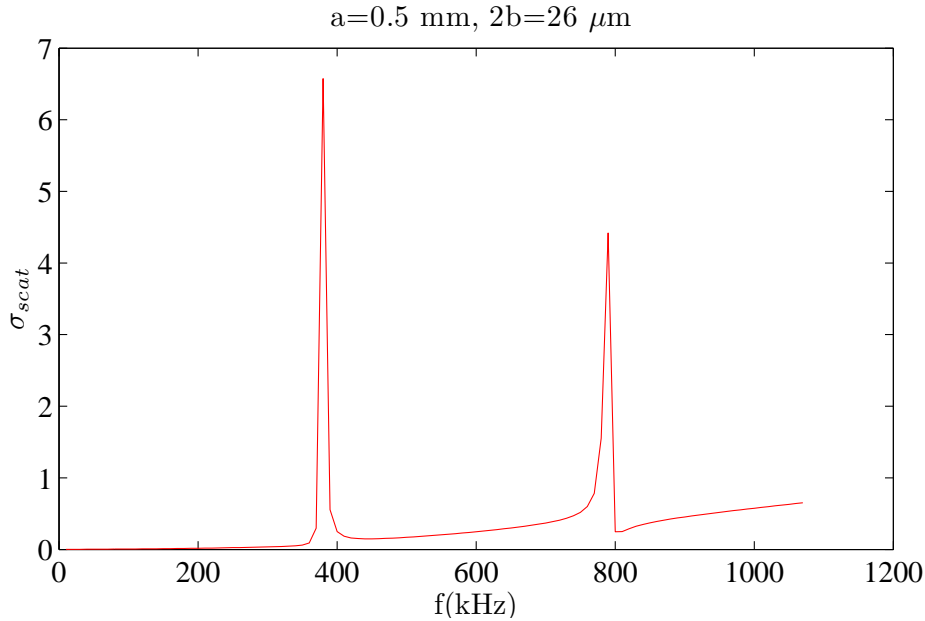


FIGURE IV.6 – Section efficace de diffusion d’un trou borgne de 1 mm de diamètre et de 380 μm de profondeur dans une plaque de silicium de 406 μm d’épaisseur, prédite par le modèle de Poisson-Kirchhoff.

Dans une expérience typique, les signaux sont stockés sur une durée de 20 ms avec une résolution de 40 ns (soit 500 000 points temporels). La richesse de ces signaux met en jeu des tailles de données colossales : 230 Go stockés après une durée totale d’expérience de 10 jours. Il faut ajouter à cette taille de données brutes celle des données créées lors du post-traitement (transformées de Fourier, opérations de filtrages ...etc). On rencontre ici une difficulté liée au stockage et au traitement de données de grande taille^k. Elle impose une analyse par portions d’une cinquantaine de points le long de la dimension temporelle ou fréquentielle. Ce nombre est en grande partie conditionné par la mémoire vive de l’ordinateur qui sert au traitement des données. Nos calculs ont été réalisés sur un PC doté d’un processeur double cœur 32 bits Intel Pentium Core 2 disposant de 3 Go de RAM et cadencé par un signal d’horloge à 2,4 GHz.

k. une solution alternative aurait consisté à faire immédiatement la transformée de Fourier et de ne stocker que la partie du spectre pertinente

IV.4.2 Résultats préliminaires

La figure IV.7 présente l'exemple de signaux temporels pris à proximité sur l'échantillon : l'un entre deux trous et l'autre dans un des deux trous. Elle met en exergue la forte résonance du diffuseur qui explique que l'amplitude du signal hors trou est quatre fois moindre que celle du signal dans le trou. Cette différence en amplitude apparaît clairement dans la figure IV.8 qui illustre les premiers instants de la dynamique temporelle du champ total de déplacement. Les points qui saturent l'image correspondent à la position des diffuseurs.

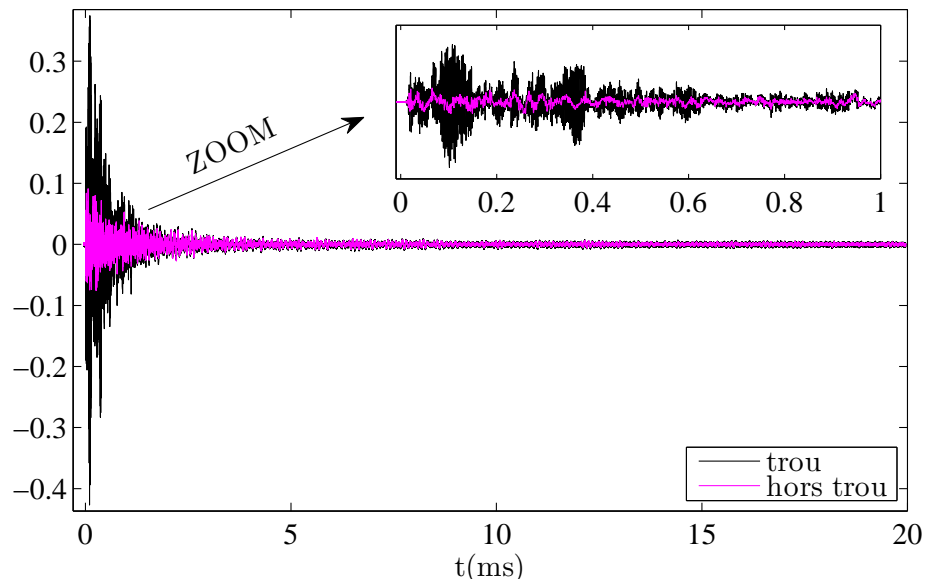


FIGURE IV.7 – Exemple de signaux temporels pris sur un trou (courbe noire) ou hors trou (courbe magenta) près de la zone d'excitation. Le début des signaux est représenté dans l'insert.

Les spectres des signaux temporels issus de (IV.7) sont présentés dans la figure IV.9. Les deux flèches noires indiquent la position des deux résonances du trou présentes dans cette gamme de fréquences. La première d'entre elles domine largement le spectre et explique que l'évolution temporelle de la figure IV.8 soit saturée par le mode fondamental (0,1) de chaque diffuseur.

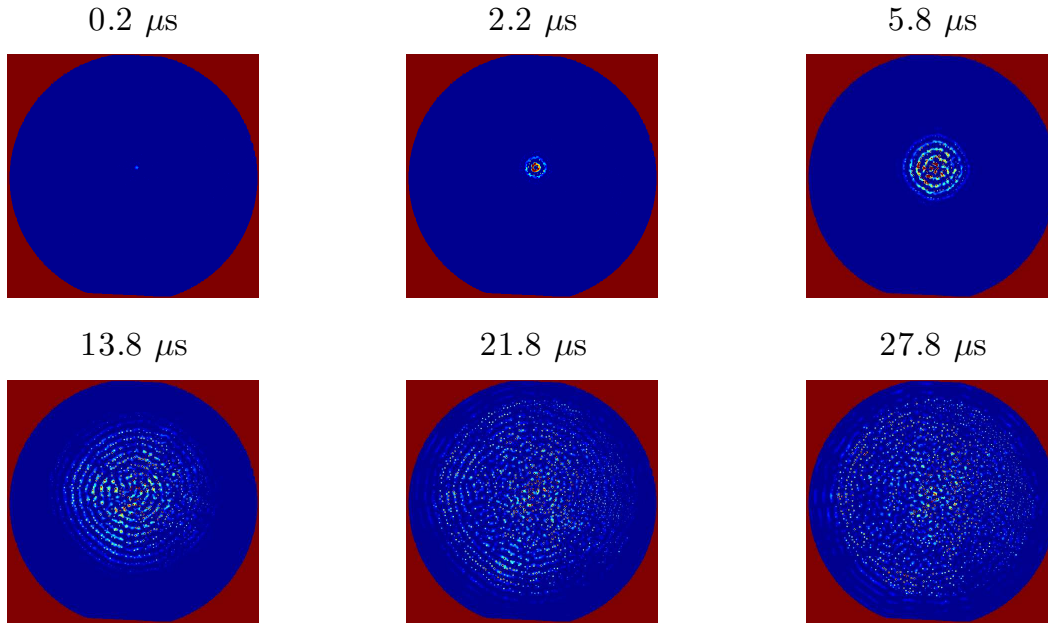


FIGURE IV.8 – Premiers instants de la dynamique temporelle du champ de déplacement normal dans la plaque désordonnée D3.

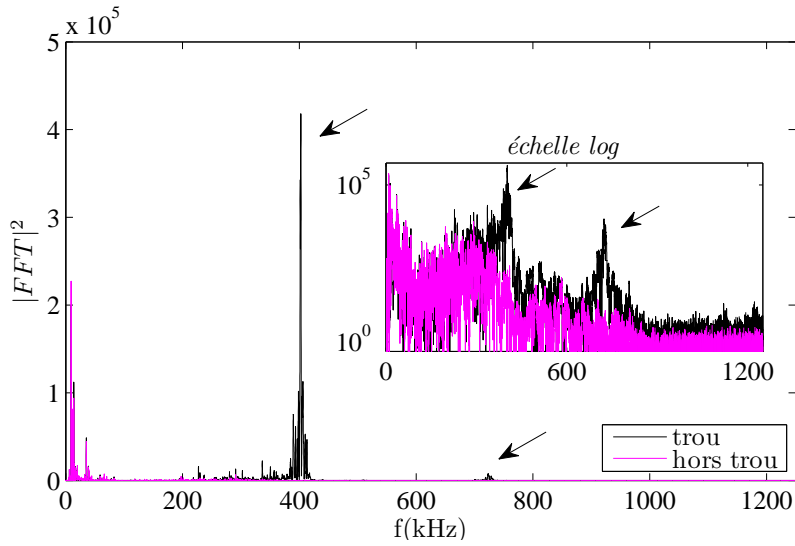


FIGURE IV.9 – Spectres des signaux temporels de la figure IV.10 entre 0 et 1.2 MHz. L'insert présente la même courbe en échelle logarithmique. Les deux flèches indiquent approximativement la position des premières résonances du trou considéré.

L'observation du spectre au centre de diffuseurs pris dans différentes zones du système met en évidence des différences significatives sur la position des résonances comme en témoigne la figure IV.10. Le fort couplage qui peut exister entre eux de par leur grande concentration et leur proximité ne peut à lui seul expliquer une telle dispersion sur la position des résonances. Cette dernière traduit une différence sur la profondeur des trous d'environ 20 μm qui est au delà de la précision de 5 μm spécifiée par le LAAS¹.

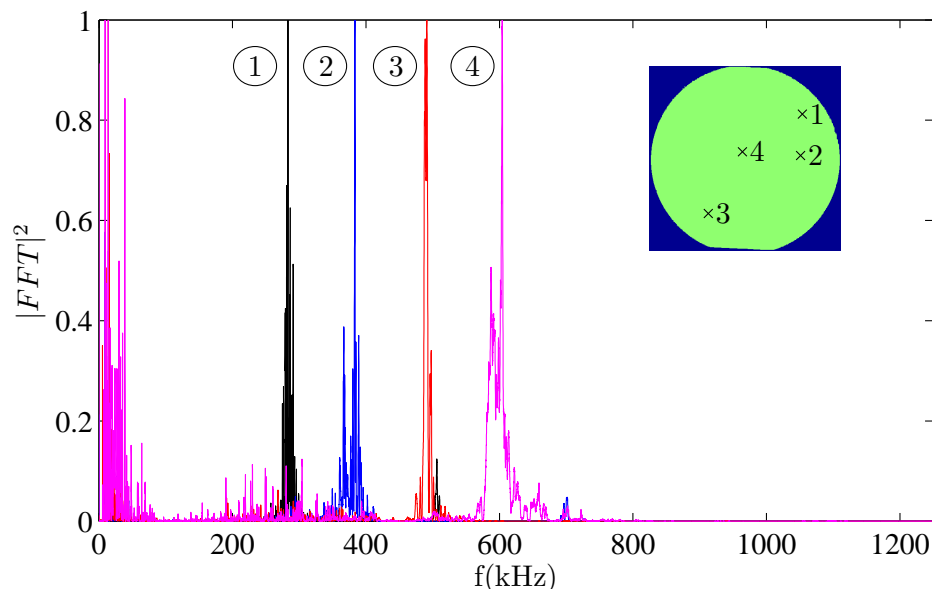


FIGURE IV.10 – Résonances de 4 trous situés à divers endroits de l'échantillon. Chaque spectre a été normalisé par l'amplitude de la résonance fondamentale. La position des trous se rapportant au spectre correspondant est indiquée sur l'échantillon représenté dans l'insert.

Une vision globale de l'évolution spatiale de la première résonance de tous les diffuseurs du système est présentée dans la figure IV.11. J'y présente la distribution spatiale du champ seulement dans les trous pour différentes fréquences. Puisque la première résonance de chaque trou domine largement chaque spectre, c'est une manière indirecte de suivre l'évolution de la position de la fréquence de résonance fondamentale dans les différentes zones de l'échantillon.

1. cette marge seule entraînerait une variation maximale de 80 kHz de la fréquence fondamentale

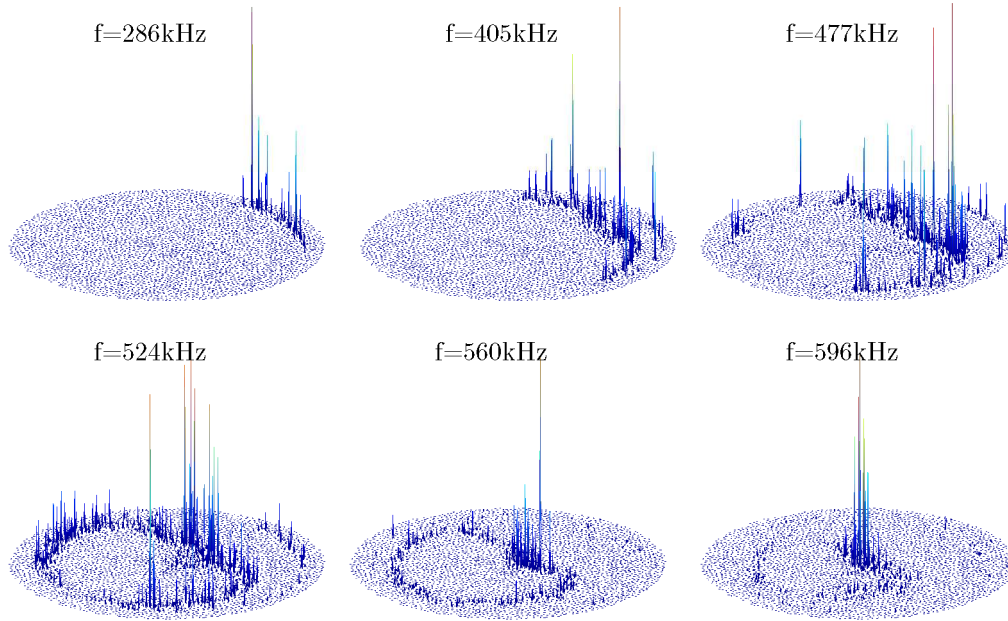


FIGURE IV.11 – Évolution spatiale de la distribution du champ dans les diffuseurs pour différentes fréquences. Les pics que l'on voit apparaître correspondent à la première résonance des trous. Cette représentation permet d'apprécier la dispersion sur la position de la fréquence fondamentale des trous selon leur position dans l'échantillon.

On voit que les trous en périphérie résonnent à des fréquences plus faibles que ceux situés au centre. Cette évolution semble suivre un schéma précis qui fait penser à une non-uniformité du processus de gravure. Elle peut s'expliquer par la présence de microstructures colonnaires en fond de trou (cf. annexe E) qui viendraient modifier l'épaisseur effective de la matière restante et modifier ainsi la fréquence de résonance.

Cette forte dispersion sur la fréquence de résonance des diffuseurs constitue malheureusement un frein à l'observation de la localisation d'Anderson puisque l'on perd l'effet collectif des diffuseurs. Néanmoins, nous verrons plus loin que nous obtenons des distributions de champ proches d'états localisés autour des fréquences de résonance des trous borgnes malgré l'absence de signature de la localisation dans le spectre.

IV.4.3 Étude dynamique

L'objectif de cette section est de mettre en exergue les différents comportements de la dynamique temporelle du champ en régime diffusif et en régime proche de la localisation forte. On peut pour cela s'intéresser par exemple au profil temporel le long d'une ligne passant par la source. Pour ce faire, on réalise une transformée de Fourier des signaux temporels présents sur cette ligne, avant d'effectuer un filtrage passe bande. Ce dernier est réalisé en multipliant les spectres par une gaussienne de position et de largeur variables. En guise d'exemple, la figure IV.12 présente quatre positions de fenêtre de filtrage de 100 kHz de large, notées α , β , γ et ϵ positionnées respectivement à 350 kHz, 500 kHz, 650 kHz et 800 kHz. La courbe bleue en pointillés permet de repérer approximativement la position de la première résonance des trous borgnes proches de la zone d'excitation. Elle correspond à la section efficace de diffusion calculée par le modèle de Poisson-Kirchhoff.

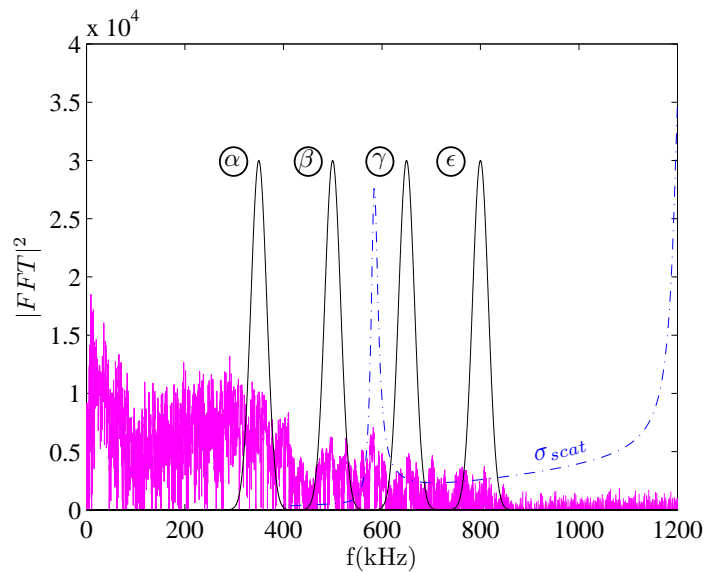


FIGURE IV.12 – Position des différentes fenêtres de filtrage α (350 kHz), β (500 kHz), γ (650 kHz) et ϵ (800 kHz). La courbe magenta correspond au spectre hors trou présenté dans la figure IV.9, en échelle logarithmique. La courbe bleue en pointillés présente la section efficace de diffusion calculée pour un trou borgne de la zone centrale.

L'étape suivante consiste à réaliser une transformation de Fourier inverse pour retourner dans le domaine temporel. De cette manière, on peut observer le profil temporel le long de la ligne verte notée X dans le schéma en haut de la figure IV.13 pour les différentes position de fenêtre de filtrage.

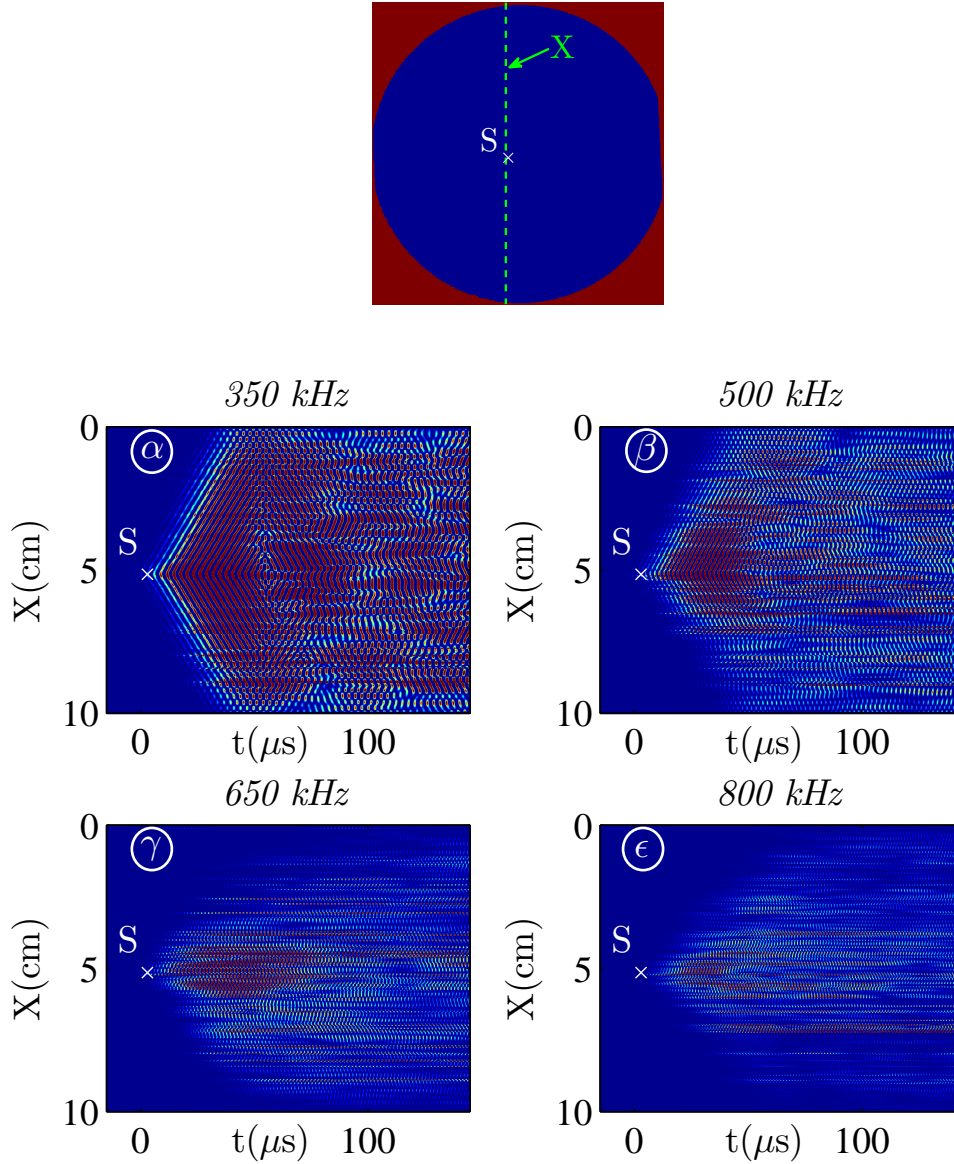


FIGURE IV.13 – Evolution du profil temporel du champ le long de la ligne verte X (illustration du haut) pour différentes positions de fenêtre de filtrage α , β , γ , ϵ . La position de la source est notée "S".

Cette représentation permet de se rendre compte globalement de la manière dont l'onde pénètre dans le système. Alors qu'on se rapproche des fréquences de résonance des trous, on voit que la progression de l'onde est de plus en plus ralentie par les diffuseurs. Cela se matérialise par le rétrécissement du cône de pénétration de l'onde. En plus de cela, le front d'onde se retrouve brisé, perd de plus en plus en régularité, traduisant ainsi les difficultés qu'éprouve l'onde à pénétrer dans le milieu. Notons que nous ne présentons pas ici les multiples combinaisons de filtrages que nous avons explorées, en terme de position et de largeur, dans la mesure où elles ne nous ont pas permis d'observer l'arrêt total du transport de l'onde, caractéristique de localisation d'Anderson.

IV.4.4 Étude modale

L'objectif de cette dernière section est de trouver dans les propriétés spectrales du champ des indications renseignant sur l'occurrence de modes localisés. On a vu précédemment le comportement des trous résonants, dont le mode fondamental domine largement la distribution du champ dans tout le milieu. On désire maintenant observer la distribution du champ entre les diffuseurs, à la recherche d'un confinement spatial. Pour ce faire, les grandeurs présentées plus loin seront calculées en excluant la contribution des diffuseurs, afin de ne pas "noyer" l'évolution hors trou.

La première figure IV.14 présente l'intensité totale du système. Si on note par $s(x, y, t)$ le signal temporel mesuré au point de coordonnées (x, y) , l'intensité est obtenue en sommant le carré du module de chaque spectre complexe :

$$I(\omega) = \sum_{x,y} |\hat{s}(x, y, \omega)|^2$$

Cette opération est réalisée sur tout l'échantillon (courbe bleue) ou en excluant les valeurs prises dans les diffuseurs (courbe rouge).

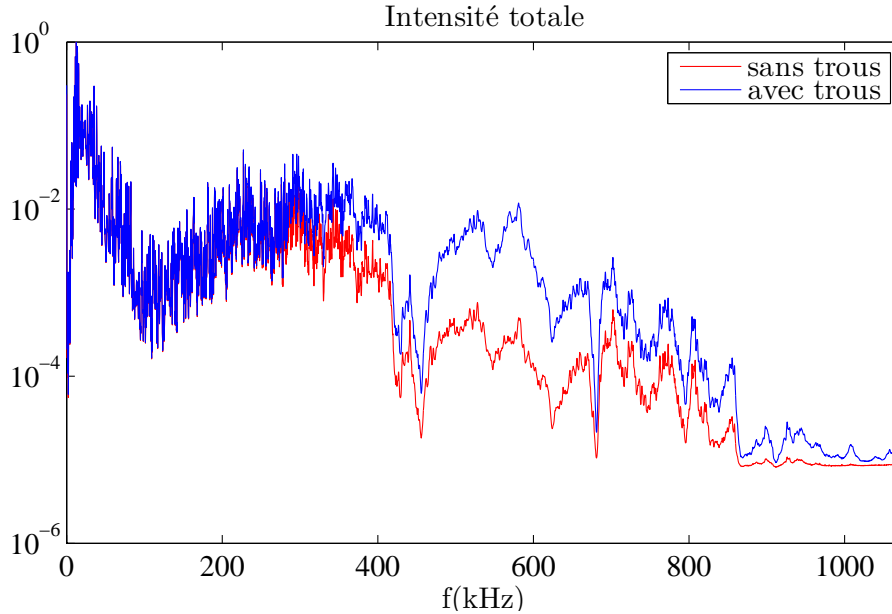


FIGURE IV.14 – Intensité totale en échelle logarithmique avec prise en compte ou non des trous dans la statistique.

Alors que ces deux dernières se superposent aux basses fréquences, elles commencent à se séparer lorsque les premiers trous résonnent (aux alentours de 300 kHz). Le plus gros écart est observée entre environ 500 kHz et 700 kHz, ce qui correspond à la position de la résonance fondamentale des trous situés près de la source. La proximité de ces derniers avec la zone d'excitation ultrasonore explique que l'amplitude de leur résonance fondamentale soit plus élevée que des trous localisés plus loin. Néanmoins, les deux courbes présentent un comportement quasi-identique en terme de forme de signal, seul un facteur d'échelle les différencie.

Lorsqu'on s'intéresse au champ dans la zone d'efficacité des trous, il est difficile de trouver des corrélations entre un confinement spatial et un comportement particulier des courbes précédentes. Par conséquent, on ne dispose pas de signature spectrale de la localisation d'Anderson où un état localisé correspond à une résonance précise et piquée dans le spectre d'intensité. Au contraire, on est dans un régime de fort recouvrement spectral qui témoigne de la richesse du spectre. Il convient donc de trouver d'autres indications qui permettent de "traquer" les modes localisés. Nous

avons choisi pour cela de nous intéresser à un paramètre appelé largeur effective^m, w_{eff} dont l'expression se trouve par exemple dans la référence [163]. Avant de le définir, il est nécessaire d'introduire l'Inverse Participation Ratio (IPR) (encore appelé Inverse Participation Number), qui indique le confinement caractéristique de l'onde, et dont la définition pour une fréquence donnée est la suivante :

$$IPR = \frac{\int I(x, y)^2 dx dy}{[\int I(x, y) dx dy]^2} \quad (IV.4)$$

La largeur effective w_{eff} se déduit de l'IPR comme suit :

$$w_{eff} = IPR^{-1/2} = \frac{\int I(x, y) dx dy}{\sqrt{\int I(x, y)^2 dx dy}} \quad (IV.5)$$

Dans notre cas, les intégrales sont remplacées par des sommes discrètes sur les positions x et y . L'expression de la largeur effective à la fréquence ω devient :

$$w_{eff}(\omega) = \frac{\sum_{x,y} I(x, y, \omega)}{\sqrt{\sum_{x,y} I(x, y, \omega)^2}} \quad (IV.6)$$

Physiquement, le paramètre de largeur effective indique l'étalement caractéristique du champ en fonction de la fréquence. Ainsi on s'attend à avoir une largeur effective faible en régime de localisation.

Les courbes de largeur effective calculées avec ou sans trou (de manière analogue aux courbes d'intensité de la figure IV.14) sont présentées dans la figure IV.15. Le gap brutal présent dans la courbe bleue (statistique faite en prenant en compte les trous) correspond aux premières résonances des trous situés en périphérie de l'échantillon. Tout comme la figure de l'intensité IV.14, mais de manière plus nette, on voit apparaître ces résonances aux alentours de 300 kHz. La courbe qui nous intéresse d'avantage est la courbe rouge qui est obtenue sans prendre en compte les trous borgnes dans la statistique. Il faut donc exclure ces derniers des calculs pour éviter de "noyer" les modes localisées par l'importante résonance des diffuseurs.

m. également appelé diamètre moyen [162]

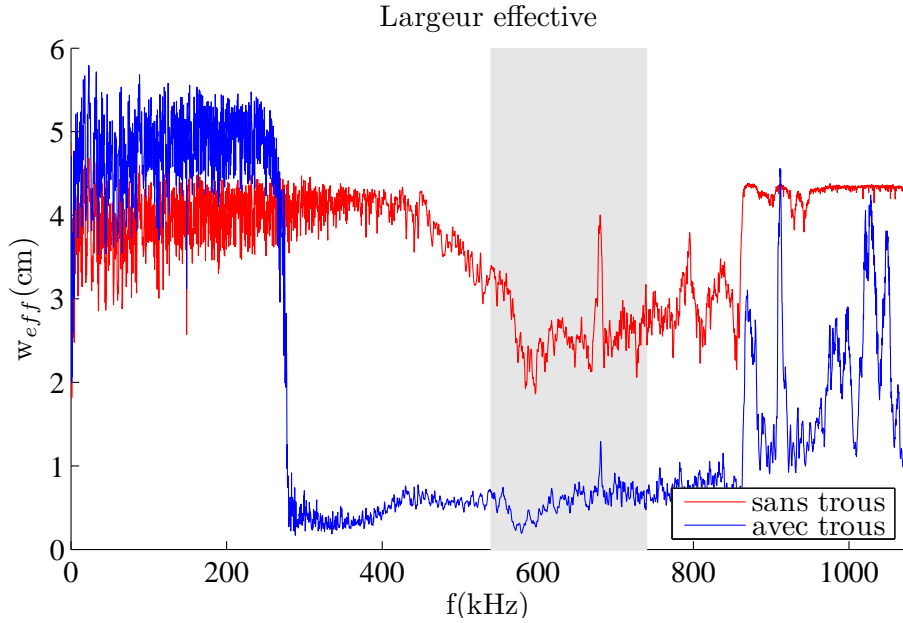


FIGURE IV.15 – Largeur effective w_{eff} avec prise en compte ou non des trous dans la statistique. La zone grisée correspond à la zone d'efficacité maximale des trous dans laquelle on s'est intéressé aux distributions de champ présentées dans la figure IV.17.

La zone grisée de la figure IV.15 indique la gamme de fréquences dans laquelle la résonance des trous est maximale. Après avoir inspecté la distribution spatiale du champ dans cet intervalle, nous avons repéré des minima de largeur effective qui correspondent à des "objets" localisésⁿ. Ces derniers sont repérés par des étoiles dans la figure IV.16. Notons que tous les minima de largeur effective ne correspondent pas nécessairement à des structures localisées.

ⁿ. on évitera d'employer le terme de "mode" ou "quasimode" dans la mesure où on est dans un régime de recouvrement spectral important et que les distributions de champ observées ne correspondent pas à des résonances isolées du spectre.

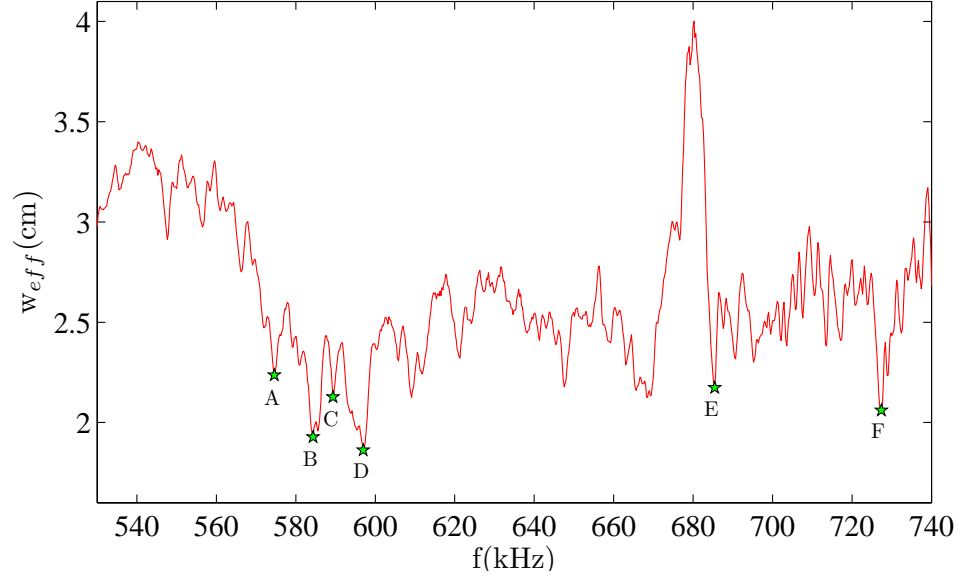


FIGURE IV.16 – Zone grisée de la figure IV.15 représentant les minima de largeur effective sélectionnés pour l’illustration de la figure IV.17.

Les distributions du champ repérées dans la figure précédente sont illustrées dans la figure IV.17. Elles apparaissent clairement spatialement localisées avec un maximum près de la source. Le profil de décroissance spatial le long d’une ligne est indiqué pour trois d’entre elles (A,B et D) dans la figure IV.18. L’échelle logarithmique fait apparaître deux droites, signe d’une décroissance exponentielle. Il est possible à partir de ces droites d’estimer la longueur de localisation dans chacun des cas : on obtient respectivement $\xi_{loc} \approx 9$ mm, $\xi_{loc} \approx 3$ mm et $\xi_{loc} \approx 6$ mm^o. Ces décroissances exponentielles correspondent à une signature d’un effet de la localisation forte.

o. on note une certaine asymétrie des profils probablement due à l’inhomogénéité de la position de la fréquence de résonance fondamentale et donc de l’efficacité de diffusion des différents trous. Les valeurs de ξ_{loc} ont été déduites de la partie gauche du profil.

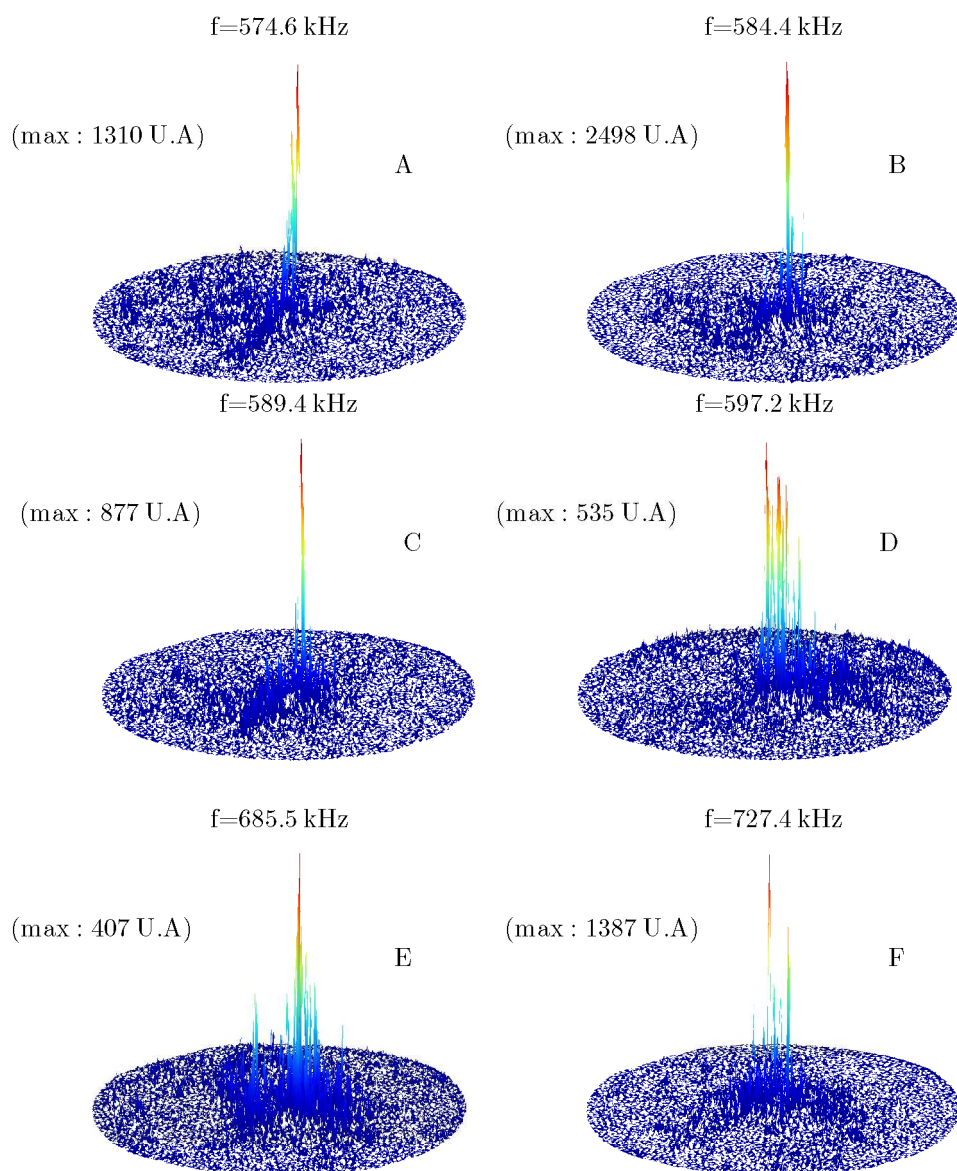


FIGURE IV.17 – Distributions de champ localisées proches de la zone centrale et correspondant aux minima de largeur effective définis dans la figure IV.16. Le maximum de chaque distribution est indiqué en unité arbitraire.

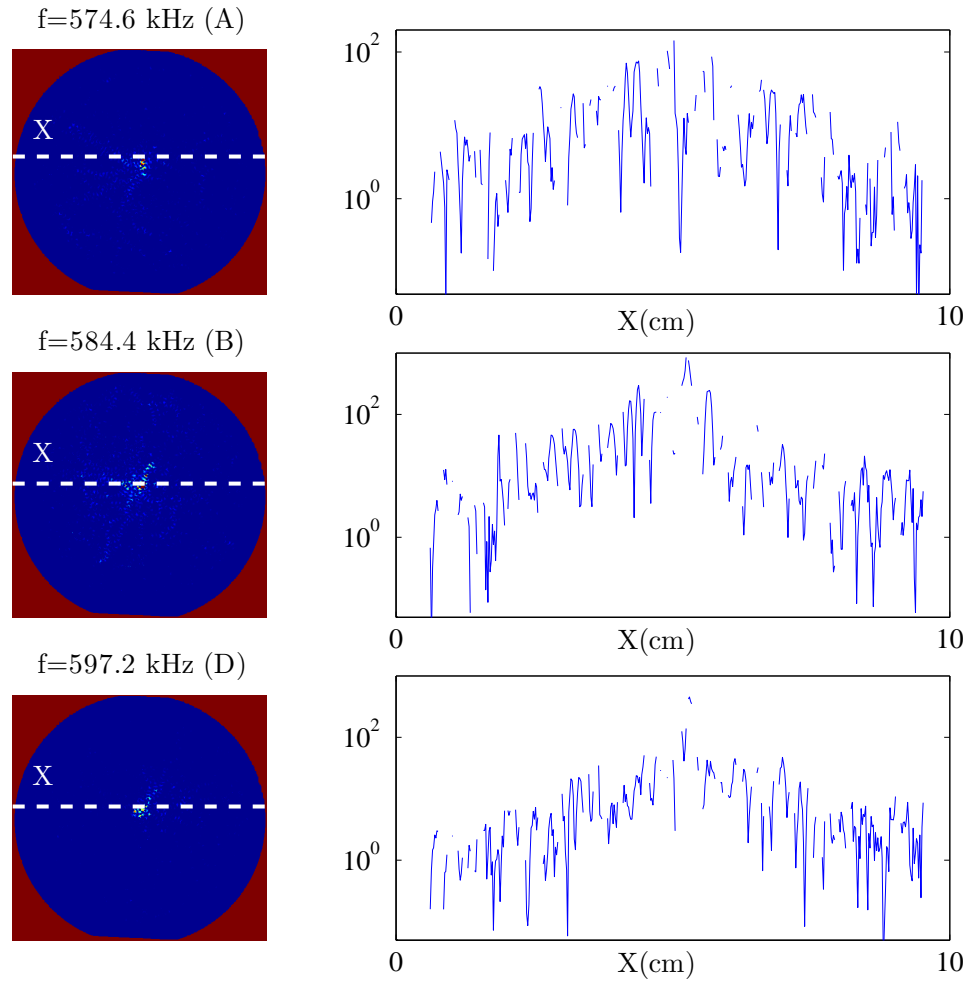


FIGURE IV.18 – Profils de décroissance spatiale en échelle logarithmique le long de la ligne notée "X" pour 3 distributions de champ de la figure IV.17.

Les observations de la figure IV.18 sont à opposer à la figure IV.19 dans laquelle on peut voir deux cartes de champ en régime diffusif accompagnées du profil de décroissance spatiale correspondant. Que ce soit dans le premier cas avant la résonance des trous à 157 kHz ou dans la zone de résonance à 491 kHz, les deux situations présentent une intensité étendue dans la totalité de l'échantillon et un profil caractéristique de décroissance spatiale plus étalé. On observe ainsi une différence nette de comportement entre un régime diffusif et un régime qui présentent une distribution spatiale localisée.

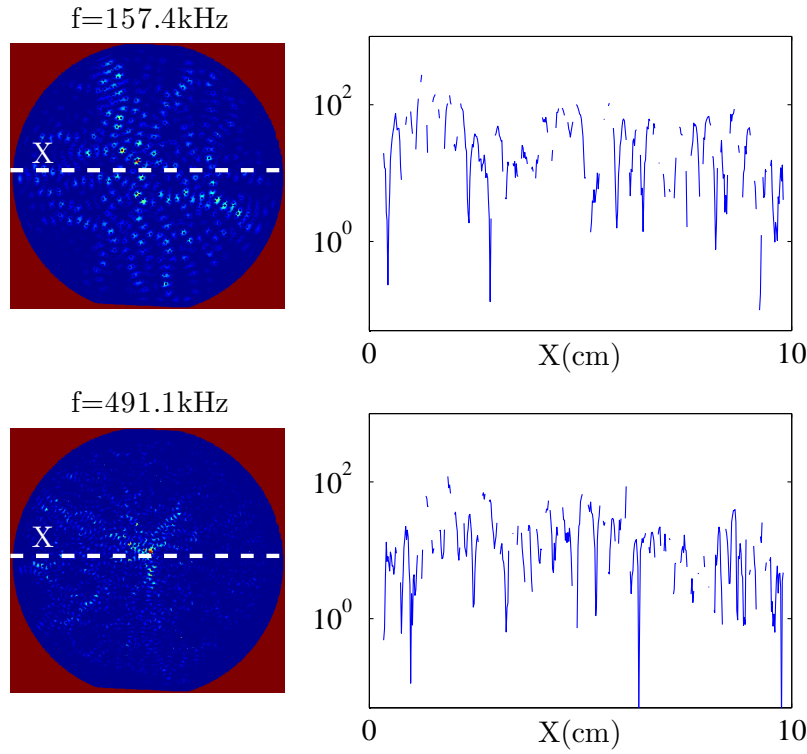


FIGURE IV.19 – Deux exemples de distribution du champ en régime diffusif et profil de décroissance spatiale le long de la ligne notée "X".

IV.5 Conclusion et perspectives

Au cours de ce dernier chapitre, nous avons utilisé le trou borgne décrit dans le chapitre précédent comme brique élémentaire d'un milieu complexe désordonné. Ce type de diffuseur possède l'avantage d'une section efficace de diffusion importante grâce à ses résonances, ce qui permet de se placer dans des régimes de diffusion extrêmes. Ces derniers peuvent être le siège d'un phénomène remarquable, la localisation d'Anderson, qui implique l'arrêt du transport de l'onde par des phénomènes d'interférences.

Après quelques rappels généraux sur la propagation en milieux complexes, nous avons établi à partir du modèle de Poisson-Kirchhoff et dans l'approximation des milieux dilués les conditions géométriques favorables à l'élaboration d'un échantillon

désordonné "localisant". Ces estimations ont abouti à la fabrication d'un échantillon de silicium contenant un grand nombre de diffuseurs répartis aléatoirement et présentant une fine épaisseur de fond de trou (autour de la vingtaine de microns).

L'utilisation de l'outil expérimental développé dans le premier chapitre de ce manuscrit a permis d'illustrer dans un premier temps la transition entre régime diffusif et régime proche de la localisation d'Anderson dans le domaine temporel. Dans un second temps, nous avons pu observer cette transition dans le domaine spectral. Les spectres ne présentant pas de résonance isolée dans la zone d'efficacité des diffuseurs, nous avons utilisé le paramètre de largeur effective w_{eff} pour pouvoir identifier les cartes de champ localisées. Ces dernières, situées à des minima de w_{eff} , présentent une décroissance spatiale exponentielle et portent ainsi la signature d'un mode localisé^p au sens d'Anderson [164].

L'ensemble de ces observations expérimentales constituent des résultats encourageants même si certaines améliorations peuvent être apportées. En particulier nos estimations préliminaires reposent sur l'approximation des milieux dilués. Mais pour la forte concentration de diffuseurs présente dans l'échantillon qui nous a été fourni, la distance qui sépare les trous est largement inférieure aux longueurs d'ondes caractéristiques du problème (typiquement d'un facteur 30) impliquant un recouvrement des sections efficaces de diffusion des différents diffuseurs. Cette grande fraction surfacique n'est pas nécessairement favorable à la localisation. En effet, il n'est pas dit que ces forts couplages ne constituent pas un frein à l'observation du phénomène de localisation d'Anderson. Malheureusement, nous n'avons pas pu disposer d'autres échantillons avec des concentrations et/ou des tailles de diffuseurs différentes pour pouvoir les comparer à nos résultats actuels. Outre la fabrication d'échantillons avec des concentrations moindres, une des améliorations futures consiste à optimiser ce qu'on appelle le facteur de structure [165], lié à la disposition et la concentration des diffuseurs, plus que le facteur de forme (qui conditionne les résonances de ces derniers).

p. ou d'une superposition de modes localisés autour de la source

Une autre perspective, serait de développer un outil numérique qui pourrait simuler nos configurations expérimentales. Une extension de la simulation FDTD avec un trou borgne décrite dans le chapitre III à un milieu contenant un grand nombre de trous n'est pour l'instant pas envisageable compte tenu des performances actuelles des outils de calcul. D'autres pistes sont peut être à creuser avec des méthodes numériques différentes (type éléments finis par exemple). Reste à savoir si elle permettront de décrire des systèmes aussi denses que le notre.

Par ailleurs, des améliorations sont également à apporter sur les technologies de gravure de nos plaques désordonnées afin d'assurer une meilleure homogénéisation des profondeurs des trous, renforçant ainsi l'effet collectif des diffuseurs, d'avoir un meilleur contrôle de l'épaisseur du fond des trous et de parfaire leur état de surface.

Enfin, la séparation des états localisés dans les fenêtres que nous avons identifiées passe par la diminution des pertes par couplage avec l'air et nécessite donc de réaliser les expériences avec notre dispositif laser/ultrasons^q. Des essais ont été effectués mais se sont avérés infructueux, ceci étant dû à l'efficacité moindre de la génération optique comparativement à la génération par transducteur de contact mais également à l'instabilité du faisceau laser sur la durée totale d'une expérience complète (environ 20 jours pour les essais que nous avons effectués). Ces réalisations impliquent soit d'améliorer l'efficacité de la génération thermoélastique, soit de réaliser un dispositif à vide adapté à la génération par transducteur de contact.

q. qui nous permet de faire un vide primaire grâce à notre "boîte à vide" en PMMA (cf. chapitre I).

Conclusion générale

Les ondes élastiques qui se propagent dans les plaques minces constituent un outil performant pour l'étude de la propagation et de la diffusion des ondes en milieux complexes. Elles permettent de développer des dispositifs expérimentaux de taille macroscopique, larges-bandes et non invasifs lorsque la génération et la détection des ultrasons sont effectuées par laser.

Dans le premier chapitre de ce manuscrit, j'ai présenté les rudiments des ondes élastiques qui se propagent dans une plaque mince isotrope de dimension latérale infinie. L'étude des ondes de Lamb, qui résultent du couplage des ondes de volume sur les surfaces libres du système, passe par la résolution numérique de l'équation de dispersion de Rayleigh-Lamb. Cette dernière fait apparaître une infinité de modes de Lamb symétriques (S_n) et antisymétriques (A_n). Néanmoins, dans nos régimes de faibles produits {fréquence×épaisseur}, seuls deux modes de Lamb se propagent^r : le mode de Lamb symétrique fondamental S_0 et le mode de Lamb antisymétrique fondamental A_0 , que l'on peut associer respectivement à une onde de compression et une onde de flexion.

Le dispositif que j'ai mis en place au LPMC permet, de par sa versatilité, d'étudier le transport de ces ondes dans des systèmes de nature différente sans changer le montage expérimental. Outre l'accès direct à la dynamique temporelle du champ de vibration normal des ondes de Lamb, il permet par reconstruction et traitement numérique d'accéder aux cartographies spatiales d'amplitude et de phase des modes du milieu étudié. Cette dernière information constitue un atout de taille dans la me-

r. en plus du mode fondamental de cisaillement horizontal SH_0 parfois oublié dans la littérature

sure où c'est la phase qui est à l'origine des phénomènes d'interférences en milieux complexes.

Le chapitre II s'inscrit dans le contexte fondamental du chaos ondulatoire. Ce domaine désigne l'étude du comportement des ondes dans les milieux dont la limite géométrique suit une dynamique chaotique. Notre attention s'est portée sur la façon dont le couplage du milieu vers l'extérieur modifie les propriétés spectrales et spatiales des fonctions d'ondes. Pour ce faire, nous avons étudié expérimentalement le comportement des ondes de Lamb dans une plaque de silicium dans laquelle le taux de pertes locales a été contrôlé en collant une bande d'élastomère d'épaisseur et de largeur variables. Pour une résonance isolée, nous avons mis en exergue la proportionnalité entre les pertes dans le domaine spatial et celles dans le domaine spectral, respectivement quantifiées par la racine carrée du paramètre de complexité q et la largeur spectrale de la résonance Γ . Ces observations sont en accord avec les prédictions théoriques basées sur le formalisme du Hamiltonien effectif développé par C. Poli et rappelé dans la première partie du chapitre.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié le problème complexe de la diffusion d'une onde de Lamb par un trou non traversant. Contrairement au cas débouchant, le trou borgne présente des résonances de forte amplitude dues à la fine épaisseur de matière restante. Ces résonances lui confèrent une section efficace de diffusion importante, faisant de ce dernier un candidat idéal pour l'étude des milieux fortement désordonnés. Une approche simplifiée a consisté à assimiler le fond du trou à une plaque fine circulaire isotrope au bord encastré. Cette démarche nous a permis d'estimer de manière simple les fréquences naturelles et les modes propres du diffuseur. Une description complète du problème de diffusion faisant appel à la théorie exacte demeure d'une très grande difficulté à mettre en place. Il paraît donc judicieux de faire appel à des approximations de la théorie tridimensionnelle de Rayleigh-Lamb. Parmi celles-ci, la description par le modèle de Poisson-Kirchhoff donne des résultats très satisfaisants dans nos gammes de {fréquence \times épaisseur} faibles.

Les expériences menées dans la deuxième moitié du chapitre III traitent de la diffusion d'une onde de flexion par un trou borgne dans une plaque de silicium. On retrouve approximativement les fréquences de résonances et les modes propres

du diffuseur estimés par les différentes théories isotropes. En outre, on observe un couplage important entre les modes de la plaque environnante et les modes du trou borgne. Ces résultats expérimentaux ont été confrontés à des simulations numériques FDTD originales développées par E.Bossy. Ces comparaisons concluantes ont permis d'une part de confirmer l'approche entreprise dans l'outil de simulation et d'autre part d'apprécier les effets de l'anisotropie sur la forme des modes et sur les levées de dégénérescence par le biais d'une série de simulations avec variation des différents paramètres géométriques (position de la source, du diffuseur, géométrie de la plaque environnante).

Dans le dernier chapitre de ce manuscrit, nous nous sommes concentrés sur l'étude de la propagation des ondes en milieux désordonnés avec un intérêt particulier pour le phénomène de localisation d'Anderson. A partir de la section efficace de diffusion prédite par le modèle de Poisson-Kirchhoff, nous avons établi des estimations sur les paramètres essentiels que sont le libre parcours moyen élastique l_e et la longueur de localisation ξ_{loc} permettant d'élaborer un dispositif désordonné localisant. Cette approche effectuée dans l'approximation des milieux dilués a débouché sur la fabrication par les membres du LAAS de plaques de silicium gravées aléatoirement. Les expériences menées sur ces échantillons ont permis dans un premier temps de mettre en exergue une transition entre régime diffusif et régime proche d'un état localisé dans le domaine temporel. Dans un second temps, nous avons observé le confinement spatial de certaines fonctions d'ondes dans la zone d'efficacité des trous borgnes et ce, malgré l'absence de résonance isolée dans le spectre. Ces distributions présentent en outre une décroissance spatiale exponentielle, signature d'un mode localisé au sens d'Anderson.

Les perspectives de ce travail expérimental sont multiples et variées. La première d'entre elles concerne les milieux chaotiques dans lesquels on peut s'intéresser au concept de fidélité quantique [166]. Ce dernier a été introduit pour caractériser la stabilité d'un système quantique face à une perturbation. Il connaît actuellement un regain d'intérêt en raison de son rôle important dans le domaine de l'information et de la communication quantiques. Le dispositif expérimental acoustique développé dans cette thèse possède l'avantage de proposer de nombreuses configurations de

perturbation par l'intermédiaire d'absorbants de taille et de forme variables, tels ceux utilisés dans le chapitre II. Il permettrait en outre une mesure directe de la fidélité grâce à l'information sur la totalité du champ du système.

D'autres perspectives émanent des conclusions du chapitre IV. La forte concentration des diffuseurs de l'échantillon proposé par la LAAS n'est pas nécessairement favorable à la localisation. En effet, dans cette configuration, on ne peut plus considérer le milieu comme dilué et les interactions entre les diffuseurs résonants ne sont plus négligeables. Il faudrait alors explorer des concentrations plus faibles et s'intéresser au facteur de structure, autrement dit la manière dont le désordre est organisé, plus qu'au facteur de forme lié aux résonances internes des diffuseurs. En résumé, une optimisation du désordre ainsi qu'une amélioration des techniques de fabrication des échantillons permettrait d'aller plus loin dans l'analyse des transitions entre états étendus et états localisés.

Enfin, la propriété remarquable du trou borgne de résonner à des fréquences d'autant plus faibles que sa profondeur est grande ouvre des perspectives intéressantes dans le domaine des métamatériaux acoustiques. Cette propriété permet de disposer d'un grand nombre de diffuseurs dans un espace de la taille d'une longueur d'onde, respectant ainsi les conditions d'homogénéisation requises pour pouvoir observer les effets spectaculaires que sont par exemple la réfraction négative ou encore le "cloaking" des ondes de flexion.

Annexe A

Tenseur des contraintes et notation de Voigt

A.1 Tenseur des contraintes

La figure suivante présente les différents composantes des contraintes qui s'appliquent sur les faces d'un cube dont les axes principaux sont portés par les vecteurs de référence d'un système de coordonnées orthonormé [167]. Les composantes σ_{ii} (notées également σ_i) représentent les contraintes normales appliquées au solide dans la direction i . Les composantes σ_{ij} représentent quant à elles les contraintes tangentielles agissant sur le plan orthogonal à la direction i . Ces dernières composantes de type cisaillement sont parfois notées par la lettre τ_{ij} . Le tenseur des contraintes s'expriment alors comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

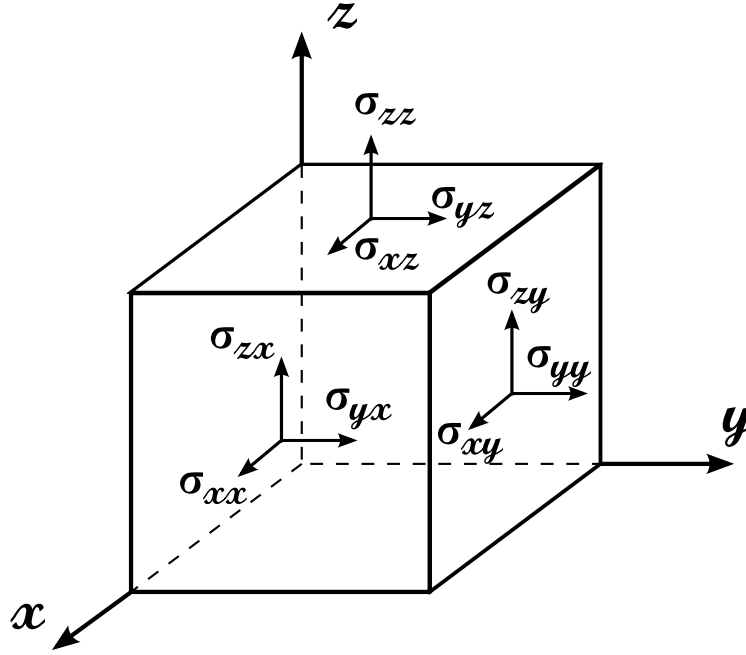


FIGURE A.1 – Contraintes s'appliquant sur les facettes d'un cube

A.2 Notation de Voigt

L'expression de la loi de Hooke généralisée $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$ porte sur des tenseurs du second et quatrième ordre symétriques. Ils peuvent être respectivement représentés par des vecteurs de dimension 6 (pour $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\epsilon}$) et par une matrice carré 6x6 (pour \mathbf{C}). La notation de Voigt [168], à deux indices I et J variant de 1 à 6, met respectivement en correspondance les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 de I et J avec les doublets (1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,1), (1,2). Ainsi cette notation permet d'écrire la loi d'élasticité précédente sous forme matricielle : $\sigma_I = C_{IJ}\epsilon_J$, qui, dans le repère orthonormé (x,y,z) donne explicitement :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

Annexe B

Code Matlab pour les courbes de dispersions

```
%% Lamb waves dispersion curves for thin plates
% we consider an isotropic , homogeneous plate of thickness 2h
% initially written by F.A. Amirkulova (January 2011)
% adapted by O. Xeridat (April 2011)

function y=Disp_Lamb()%Plate parameters
%Aluminium
Ct=0.34; %shear wave speed (m\s)
nu=0.34; %poisson Ratio
k2 = 2*(1-nu)/(1-2*nu) ; %k2=C1^2/Ct^2;

numroots=5; %number of roots
ISYM=1; % 1: symmetric modes      2: antisymmetric modes
sp = 8; sv = 0.01:0.01:sp; a0=(.2)^2;
for N=1:numroots
a0=N^2-.99;
for J=1:length(sv)
s2=sv(J)^2;
```

```

if N==1
Dfun= @(a) 1;
else
Dfun= @(a) prod( (a-xv(J,1:N-1)) );
end

if ISYM==1
xv(J,N)=fzero(@(a) RL_sym1(a,s2,k2)/Dfun(a), a0);
else
xv(J,N)=fzero(@(a) RL_antisym1(a,s2,k2)/Dfun(a), a0);
end
a0=xv(J,N);
end
end
OMEGA=sqrt(xv); FREAKY=OMEGA*Ct/pi;
plot(2*sv,FREAKY*1e-3, 'b--','LineWidth',1.5); grid on
xlabel('k.2h')
ylabel('f.2h ($MHz.mm$)')

hold on
ISYM=2;
for N=1:numroots
a0=N^2-.99;
for J=1:length(sv)
s2=sv(J)^2;
if N==1
Dfun= @(a) 1;
else
Dfun= @(a) prod( (a-xv(J,1:N-1)) );
end

if ISYM==1
xv(J,N)=fzero(@(a) RL_sym1(a,s2,k2)/Dfun(a), a0);

```

```

else
xv(J,N)=fzero(@(a) RL_antisym1(a,s2,k2)/Dfun(a), a0);
end
a0=xv(J,N);
end
end
OMEGA=sqrt(xv); FREAKY=OMEGA*Ct/pi;
plot(2*sv,FREAKY*1e-3, 'r', 'LineWidth',1.5); grid on
text(2.2,0.7, '$A_0$')
text(0.3,2, '$S_0$')
ylim([0 20])
xlim([0 15])
%%
function f=RL_sym1(a,s2,k2)
x=sqrt(a-s2); y=sqrt(a./k2-s2);
f=(sin(x)./x.*cos(y).*(a-2*s2).^2+cos(x).*sin(y).*4.*s2.*y)./a;
end

%%
function f = RL_antisym1(a,s2,k2)
x=sqrt(a-s2); y=sqrt(a./k2-s2);
f=(sin(x).*cos(y).*4.*s2.*x+cos(x).*sin(y)./y.*(a-2*s2).^2)./a;
end
end

```


Annexe C

Courant délivré par la sonde interférométrique

Pour déterminer l'expression du courant délivré par la sonde interférométrique, il faut partir de l'expression des champs électriques des faisceaux sonde et référence :

$$E_R = E_0 e^{i(\omega_L t + \theta_R)}$$
$$E_S = E_0 e^{i[(\omega_L + \omega_B)t + \theta_S + \Delta\phi(t)]}$$

où ω_L est la pulsation du faisceau laser incident, ω_B la pulsation induite par la cellule de Bragg et $\Delta\phi(t)$ le déphasage du faisceau sonde engendré par la vibration de la surface. Dans le cas d'une excitation sinusoïdale $d(t) = u \cos(\omega_0 t + \psi)$, le déphasage est donné par la relation :

$$\Delta\phi(t) = 2k_L d(t) = 2 \left(\frac{\omega_L}{c} \right) u \cos(\omega_0 t + \psi)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Le courant détecté par la photodiode est :

$$I(t) = |E_R + E_S|^2 = I_0 [1 + \cos(\omega_B t + \theta_S - \theta_R + \Delta\phi(t))]$$

Pour un déplacement petit devant la longueur d'onde ($k_L u \ll 1$), une nouvelle expression de $I(t)$ est obtenue :

$$I(t) = I_0[1 + \cos(\omega_B t + \theta_S - \theta_R) + k_L u \cos[(\omega_B + \omega_0)t + \theta_S - \theta_R + \psi] \\ - k_L u \cos[(\omega_B - \omega_0)t + \theta_S - \theta_R - \psi]$$

Le spectre du signal est donc composé d'une raie centrale à f_B et deux raies latérales à $f_B + \nu_0$ et $f_B - \nu_0$. Les fluctuations aléatoires $\theta_S - \theta_R$ affectent la raie centrale et les deux raies latérales. Elles sont éliminées par une détection électronique cohérente qui effectue la différence de la fréquence de la raie centrale et de l'une des deux raies latérales. Un dispositif adéquat de filtrage permet au final de récupérer un signal directement proportionnel à $\Delta\phi(t)$ i.e au déplacement normal de la surface.

Annexe D

Modèle de diffusion de Poisson-Kirchhoff

D.1 Expression des grandeurs

La démarche entreprise ici est identique à celle que l'on trouve dans l'article de Grahn [109]. L'objectif de cette annexe est de développer, clarifier et uniformiser les différentes notations que l'on peut trouver dans les divers articles et de rectifier les erreurs de typographie et/ou de calculs.

D.1.1 Déplacements et déformations

On exprime le champ de déplacement total comme la somme des déplacements des modèles de Poisson et Kirchhoff :

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - z \frac{\partial w}{\partial r} \quad (\text{D.1})$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (\text{D.2})$$

$$u_z = w(r, \theta) \quad (\text{D.3})$$

Le tenseur des petites déformations (ou tenseur linéarisé) se déduit du déplacement \mathbf{u} à partir de la relation suivante :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u})^T] \quad (\text{D.4})$$

On rappelle l'expression du gradient d'un vecteur en coordonnées cylindriques [169] :

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{D.5})$$

ainsi, on a explicitement :

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (\text{D.6})$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{D.7})$$

$$2\epsilon_{r\theta} = \gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (\text{D.8})$$

$$2\epsilon_{\theta z} = \gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \approx 0 \quad (\text{D.9})$$

$$2\epsilon_{rz} = \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} \approx 0 \quad (\text{D.10})$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{D.11})$$

où $\gamma_{\theta z}$ et γ_{rz} représentent les déformations de type cisaillement transverse qui, par hypothèse, sont négligées dans l'approche de Kirchhoff.

Le développement de ces expressions fait apparaître deux termes : un premier correspondant au sous-problème membranaire ("partie Poisson") qui dépend de ϕ et ψ , et un deuxième proportionnel à z relatif à l'étude en flexion de la plaque ("partie Kirchhoff"). On peut donc réécrire le tenseur des déformations sous la forme générale :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_m + z\boldsymbol{\epsilon}_f \quad (\text{D.12})$$

Remarque : les expressions des composantes du tenseur des déformations font apparaître quelques incohérences du modèle de Kirchhoff : en particulier l'annulation des composantes de cisaillement transverse implique, pour un matériau isotrope qui suit la loi de Hooke, l'annulation des contraintes de cisaillement et donc l'absence de force de cisaillement transverse. Mais ces dernières doivent être présentes pour des raisons d'équilibre des forces (cf. paragraphe 26.3.4 de la référence [170]).

Une autre incohérence vient de l'annulation de la composante ϵ_{zz} qui signifie que la plaque est en état de déformations planes alors que la physique de la plaque se

rapproche plus d'un état de contraintes planes ($\sigma_{zz} = 0$). Pour une plaque homogène isotrope, la simultanéité de ces deux hypothèses implique l'annulation du coefficient de Poisson.

D.1.2 Contraintes

On déduit le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ du tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}$ à partir de la loi de comportement élastique suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\boldsymbol{\epsilon} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} \quad (\mathbf{I} \text{ est la matrice identité})$$

qui peut aussi s'exprimer en fonction des coefficients de Lamé μ et λ :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} \quad (\text{D.13})$$

Le caractère linéaire de cette relation fait que le découplage membranaire/flexion se retrouve au niveau des contraintes. On peut donc écrire [171] :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_m + z\boldsymbol{\sigma}_f \quad (\text{D.14})$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{C}.\boldsymbol{\epsilon}_m \quad (\text{D.15})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f = \mathbf{C}.\boldsymbol{\epsilon}_f \quad (\text{D.16})$$

où \mathbf{C} est le tenseur des rigidités (ou d'élasticité).

La résultante de $\boldsymbol{\sigma}$ sur l'épaisseur de la plaque permet de définir le tenseur des tensions \mathbf{N} :

$$\mathbf{N} = \int_{-h}^h \boldsymbol{\sigma} dz = \int_{-h}^h \boldsymbol{\sigma}_m dz + \int_{-h}^h z\boldsymbol{\sigma}_f dz = \int_{-h}^h \boldsymbol{\sigma}_m dz = 2h\boldsymbol{\sigma}_m \quad (\text{D.17})$$

De même, on définit le tenseur des flexions \mathbf{M} représentant les moments induits par $\boldsymbol{\sigma}$ sur l'épaisseur de la plaque :

$$\mathbf{M} = \int_{-h}^h \boldsymbol{\sigma} z dz = \int_{-h}^h z\boldsymbol{\sigma}_m dz + \int_{-h}^h z^2\boldsymbol{\sigma}_f dz = \int_{-h}^h z^2\boldsymbol{\sigma}_f dz = \frac{2h^3}{3}\boldsymbol{\sigma}_f \quad (\text{D.18})$$

on peut ainsi reformuler $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{N}}{2h} + z\mathbf{M}\frac{3}{2h^3} \quad (\text{D.19})$$

De la relation (D.1.2) on déduit les expressions des deux précédents tenseurs :

$$\mathbf{N} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}[(1-\nu)\boldsymbol{\epsilon}_m + \nu \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}_m)\mathbf{I}] \quad (\text{D.20})$$

$$\mathbf{M} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}[(1-\nu)\boldsymbol{\epsilon}_f + \nu \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}_f)\mathbf{I}] \quad (\text{D.21})$$

soit explicitement :

$$N_{rr} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \right] + \frac{2Eh}{1+\nu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] \quad (\text{D.22})$$

$$N_{\theta\theta} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \right] + \frac{2Eh}{1+\nu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right] \quad (\text{D.23})$$

$$N_{r\theta} = \frac{2Eh}{1+\nu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{D.24})$$

et :

$$M_{rr} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{D.25})$$

$$M_{\theta\theta} = -D \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] \quad (\text{D.26})$$

$$M_{r\theta} = -D(1-\nu) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \quad (\text{D.27})$$

$$(\text{D.28})$$

où N_{rr} , $N_{\theta\theta}$ et $N_{r\theta}$ désignent les efforts normaux et tranchant dans le plan de la plaque. M_{rr} , $M_{\theta\theta}$ et $M_{r\theta}$ représentent respectivement les moments de flexion et le moment de torsion.

Les forces de cisaillement transverse \mathbf{Q} ont pour expressions :

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) \quad (\text{D.29})$$

$$Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta w) \quad (\text{D.30})$$

avec l'opérateur laplacien Δ en coordonnées polaires :

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{D.31})$$

Pour une plaque de dimensions latérales finies, les conditions de bords libres impliquent l'annulation de trois quantités : les moments de flexion, de torsion et les forces de cisaillement transverse. Kirchhoff [172] a montré qu'il était possible de regrouper deux de ces trois conditions en introduisant une nouvelle quantité, \mathbf{V} , que l'on nomme réaction de bord de Kelvin-Kirchhoff^a [174] et qui dépend du moment de torsion $M_{r\theta}$ et des forces de cisaillement transverse \mathbf{Q} :

$$V_r = Q_r - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \quad (\text{D.32})$$

$$V_\theta = Q_\theta - \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \quad (\text{D.33})$$

a. ou encore Force équivalente de Kirchhoff ou Cisaillement modifié [173]

D.2 Éléments de matrice

On rappelle que les exposants $<$ et $>$ du nombre d'onde de Kirchhoff k_f déterminent si ce dernier est calculé respectivement dans la région du trou d'épaisseur $2b$ ou dans la plaque environnante d'épaisseur $2h$. Le prime désigne quant à lui l'opération de dérivation des fonctions de Bessel par rapport à l'argument (kr). Les éléments de la matrice α de l'équation (III.53) qui permettent de déterminer les coefficients d'expansion a_m, b_m, \dots, h_m sont :

$$\alpha_{11} = (k_P a) H_m'(k_P a), \quad \alpha_{12} = im H_m(k_T a), \quad \alpha_{13} = \left(1 - \frac{b}{h}\right) (k_f^> a) H_m'(k_f^> a),$$

$$\alpha_{14} = \left(1 - \frac{b}{h}\right) (k_f^> a) K_m'(k_f^> a), \quad \alpha_{15} = -(k_P a) J_m'(k_P a), \quad \alpha_{16} = -im J_m(k_T a)$$

$$\alpha_{21} = im H_m(k_P a), \quad \alpha_{22} = -(k_T a) H_m'(k_T a), \quad \alpha_{23} = im \left(1 - \frac{b}{h}\right) H_m(k_f^> a),$$

$$\alpha_{24} = im \left(1 - \frac{b}{h}\right) K_m(k_f^> a), \quad \alpha_{25} = -im J_m(k_P a), \quad \alpha_{26} = (k_T a) J_m'(k_T a)$$

$$\alpha_{33} = H_m(k_f^> a), \quad \alpha_{34} = K_m(k_f^> a), \quad \alpha_{37} = -J_m(k_f^< a), \quad \alpha_{38} = -I_m(k_f^< a)$$

$$\alpha_{43} = (k_f^> a) H_m'(k_f^> a), \quad \alpha_{44} = (k_f^> a) K_m'(k_f^> a), \quad \alpha_{47} = -(k_f^< a) J_m'(k_f^< a),$$

$$\alpha_{48} = -(k_f^< a) I_m'(k_f^< a)$$

$$\alpha_{51} = [m^2 - \gamma(k_P a)^2] H_m(k_P a) - (k_P a) H_m'(k_P a),$$

$$\alpha_{52} = im[(k_T a) H_m'(k_T a) - H_m(k_T a)]$$

$$\alpha_{55} = -\frac{b}{h} [m^2 - \gamma(k_P a)^2] J_m(k_P a) - (k_P a) J_m'(k_P a),$$

$$\alpha_{56} = -im \frac{b}{h} [(k_T a) J_m'(k_T a) - J_m(k_T a)]$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{61} &= im[(k_P a)H'_m(k_P a) - H_m(k_P a)], \\
\alpha_{62} &= \left(\frac{(k_T a)^2}{2} - m^2 \right) H_m(k_T a) + (k_T a)H'_m(k_T a) \\
\alpha_{65} &= -im \frac{b}{h} [(k_P a)J'_m(k_P a) - J_m(k_P a)], \\
\alpha_{66} &= -\frac{b}{h} \left[\left(\frac{(k_T a)^2}{2} - m^2 \right) J_m(k_T a) + (k_T a)J'_m(k_T a) \right] \\
\\
\alpha_{73} &= \frac{2}{3} \left[(\gamma(k_f^> a)^2 + m^2) (k_f^> a)H'_m(k_f^> a) - m^2 H_m(k_f^> a) \right], \\
\alpha_{74} &= \frac{2}{3} \left[(-\gamma(k_f^> a)^2 + m^2) (k_f^> a)K'_m(k_f^> a) - m^2 K_m(k_f^> a) \right], \\
\alpha_{75} &= -2 \left(1 - \frac{b}{h} \right) \frac{b}{h} m^2 [(k_P a)J'_m(k_P a) - J_m(k_P a)], \\
\alpha_{76} &= 2 \left(1 - \frac{b}{h} \right) \frac{b}{h} im \left[\left(\frac{(k_T a)^2}{2} - m^2 \right) J_m(k_T a) + (k_T a)J'_m(k_T a) \right], \\
\alpha_{77} &= -\frac{2}{3} \left(\frac{b}{h} \right)^3 \left[(\gamma(k_f^< a)^2 + m^2) (k_f^< a)J'_m(k_f^< a) - m^2 J_m(k_f^< a) \right], \\
\alpha_{78} &= -\frac{2}{3} \left(\frac{b}{h} \right)^3 \left[(-\gamma(k_f^< a)^2 + m^2) (k_f^< a)I'_m(k_f^< a) - m^2 I_m(k_f^< a) \right] \\
\\
\alpha_{83} &= -\frac{2}{3} \left[(m^2 - \gamma(k_f^> a)^2) H_m(k_f^> a) - (k_f^> a)H'_m(k_f^> a) \right], \\
\alpha_{84} &= -\frac{2}{3} \left[(m^2 + \gamma(k_f^> a)^2) K_m(k_f^> a) - (k_f^> a)K'_m(k_f^> a) \right], \\
\alpha_{85} &= 2 \left(1 - \frac{b}{h} \right) \frac{b}{h} \left[(m^2 - \gamma(k_P a)^2) J_m(k_P a) - (k_P a)J'_m(k_P a) \right], \\
\alpha_{86} &= 2 \left(1 - \frac{b}{h} \right) \frac{b}{h} im \left[(k_T a)J'_m(k_T a) - J_m(k_T a) \right], \\
\alpha_{87} &= \frac{2}{3} \left(\frac{b}{h} \right)^3 \left[(m^2 - \gamma(k_f^< a)^2) J_m(k_f^< a) - (k_f^< a)J'_m(k_f^< a) \right], \\
\alpha_{88} &= \frac{2}{3} \left(\frac{b}{h} \right)^3 \left[(m^2 + \gamma(k_f^< a)^2) I_m(k_f^< a) - (k_f^< a)I'_m(k_f^< a) \right]
\end{aligned}$$

avec $\gamma = \frac{1}{1 - \nu}$.

Les éléments β_i de la matrice du champ A_0 incident sont les suivants :

$$\begin{aligned}\beta_3 &= -i^m J_m(k_f^> a) \\ \beta_4 &= -i^m (k_f^> a) J_m'(k_f^> a) \\ \beta_7 &= -i^m \frac{2}{3} \left[J_m'(k_f^> a) \left(\gamma(k_f^> a)^3 + m^2 (k_f^> a) \right) - m^2 J_m(k_f^> a) \right] \\ \beta_8 &= i^m \frac{2}{3} \left[J_m(k_f^> a) \left(m^2 - \gamma(k_f^> a)^2 \right) - (k_f^> a) J_m'(k_f^> a) \right]\end{aligned}$$

On rappelle l'expression des dérivées des fonctions de Bessel [175] :

– les dérivées premières :

$$\begin{aligned}J_m'(x) &= J_{m-1} - \left(\frac{m}{x}\right) J_m = -J_{m+1} + \left(\frac{m}{x}\right) J_m = \frac{1}{2}(J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)) \\ H_m'(x) &= H_{m-1} - \left(\frac{m}{x}\right) H_m = -H_{m+1} + \left(\frac{m}{x}\right) H_m = \frac{1}{2}(H_{m-1}(x) - H_{m+1}(x)) \\ I_m'(x) &= I_{m-1} - \left(\frac{m}{x}\right) I_m = I_{m+1} + \left(\frac{m}{x}\right) I_m = \frac{1}{2}(I_{m-1}(x) + I_{m+1}(x)) \\ K_m'(x) &= -K_{m-1} - \left(\frac{m}{x}\right) K_m = -K_{m+1} + \left(\frac{m}{x}\right) K_m = -\frac{1}{2}(K_{m-1}(x) + K_{m+1}(x))\end{aligned}$$

– les dérivées secondes :

$$\begin{aligned}J_m''(x) &= J_m(x) \left(\frac{m^2}{x^2} - 1 \right) - \frac{J_m'(x)}{x} \quad (\text{idem pour } H_m''(x)) \\ I_m''(x) &= I_m(x) \left(\frac{m^2}{x^2} + 1 \right) - \frac{I_m'(x)}{x} \quad (\text{idem pour } K_m''(x))\end{aligned}$$

Annexe **E**

Élaboration des échantillons de silicium

Cette annexe permet d'exposer la méthode qui a été utilisée pour fabriquer nos échantillons de silicium percés d'un ou de plusieurs trous borgnes. Ces derniers ont été réalisés dans le Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes (le LAAS) à Toulouse, dans le cadre d'une collaboration ^a avec l'équipe photonique. Nous présentons les difficultés rencontrées lors de l'élaboration et les quelques imperfections des échantillons.

E.1 Gravure profonde du silicium

Une étape préliminaire consiste à inscrire le motif que l'on souhaite obtenir sur le substrat de silicium à graver. Celle-ci est réalisée par photolithographie UV : une résine photosensible est déposée sur l'échantillon à graver, puis exposé à un rayonnement lumineux UV à travers un masque contenant le motif. Le substrat est ensuite plongé dans une base forte afin de "développer" (comme en photographie) l'image transférée.

a. Projet PEPS 07-20 2007-2008

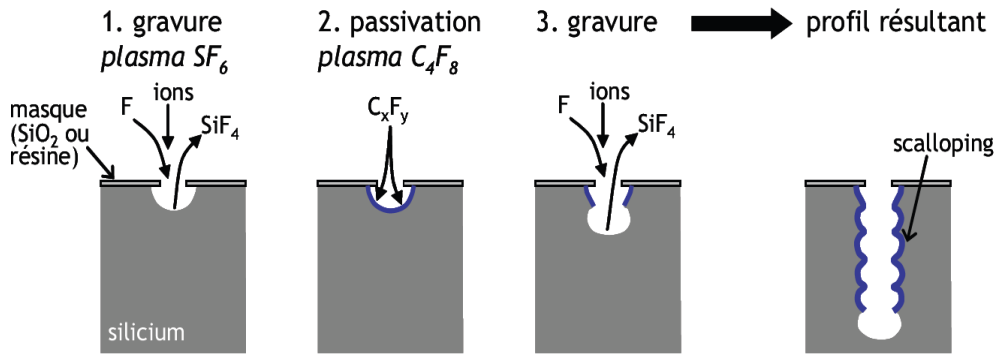


FIGURE E.1 – Principe du procédé de gravure Bosch. Extrait de [176].

Généralement, la gravure profonde du silicium est obtenue soit par le procédé Bosch soit le procédé cryogénique [176]. Le principe de ces procédés repose sur l'utilisation alternée (pour le Bosch) ou simultanée (pour le cryogénique) de deux plasmas différents, l'un ayant pour rôle de fournir des agents de gravure, l'autre participant à un processus de passivation des flancs du trou. Le procédé cryogénique présente des flancs de gravure plus lisses mais nécessite une régulation stricte de la température aux alentours de -100°C .

C'est le procédé de gravure Bosch qui a été utilisé pour fabriquer nos échantillons. A température ambiante, il utilise une alternance de plasma de gravure (SF_6) et de plasma de passivation (C_4F_8 , C_2F_6 , CF_4 ou CHF_3). Son principe est illustré dans la figure E.1.

Le plasma SF_6 grave rapidement le silicium de manière isotrope puis le plasma de passivation C_4F_8 dépose une couche de protection épaisse sur les flancs mais mince sur le fond du motif en déposant un polymère de type C_xF_y . L'étape de gravure suivante détruit la fine couche de passivation au fond du motif à l'aide du bombardement ionique. Le silicium non protégé par la couche de passivation est alors gravé dans cette même étape par les radicaux fluorés provenant du plasma SF_6 . En réitérant les étapes de gravure et de passivation, une gravure profonde anisotrope peut être alors obtenue avec un fort rapport d'aspect^b.

b. le rapport d'aspect est défini comme le rapport de la profondeur gravée sur l'ouverture du motif.

Notons que, contrairement au processus cryogénique, la gravure Bosch peut présenter une ondulation des flancs (telle qu'on la voit sur l'image de droite de la figure E.1) qui porte le nom de "scalloping".

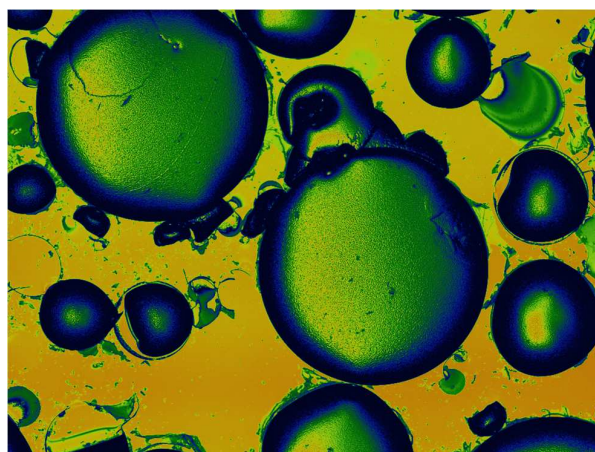


FIGURE E.2 – Observations au microscope confocal des bulles apparues lors du processus de lithographie UV.

E.2 Résultats et imperfections

L'élaboration des processus de gravure des trous borgnes dans nos échantillons ont nécessité un procédé technologique spécifique à ces géométries. En effet, les grandes surfaces couvertes par les motifs induisent des comportements inhabituels de la résine photosensible utilisée, notamment un dégazage des résidus de solvants dissous dans la résine illustré dans la figure E.2 [177]. Les améliorations apportées au procédé ont consisté notamment en la mise en place d'une séquence d'enduction et de recuit optimisée pour obtenir une résine suffisamment durcie et épaisse pour la gravure. Le résultat final est illustré par les images au microscope de la figure E.3. On y voit la surface de la plaque de silicium percée de quelques trous borgnes avec une mise au point en surface de plaque et au fond des trous.

Le profil du fond des trous est présenté dans la figure E.4. On voit que, contrairement aux hypothèses des théories et modèles numériques développés dans le chapitre III, le fond du trou n'est pas plat. On estime d'après ce profil qu'il y a environ $5\text{ }\mu\text{m}$

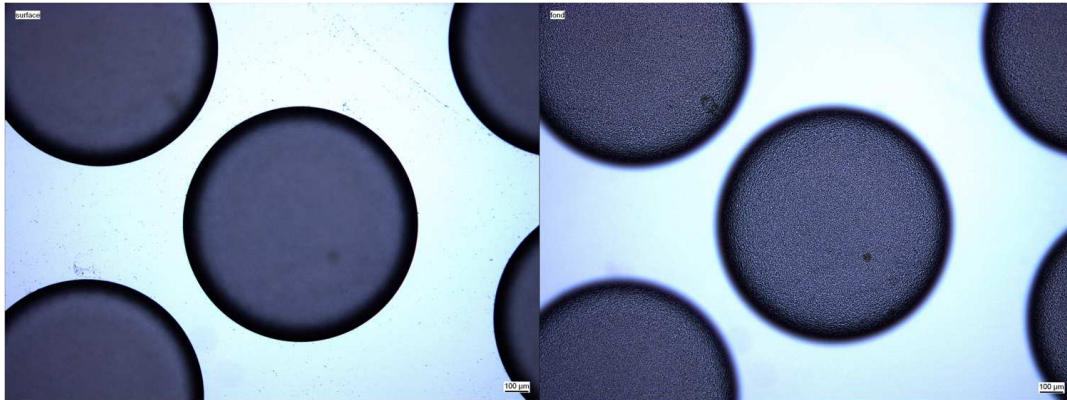


FIGURE E.3 – Résultats obtenus avec le procédé final : mise au point réalisée en surface (image de gauche) et au fond des trous (à droite).

entre le point le plus haut et le point le plus bas du fond du trou. A cela s'ajoute l'incertitude sur la détermination de la profondeur qui est de 5% .

Compte tenu des contraintes technologiques et pour éviter le risque de percer la plaque de part en part, l'épaisseur du fond de trou la plus fine qu'on ait pu obtenir de manière contrôlée mesure une vingtaine de microns.

Sur les échantillons à forte concentration de trous décrits dans le dernier chapitre de ce manuscrit, on note la présence de quelques défauts de gravure, dont les principaux types sont présentés dans la figure E.5. Les zones claires correspondent à des portions qui n'ont pas été gravées.

Nous avons également constaté la présence d'hétérogénéités en fond de trou. Il s'agit en réalité de microstructures colonnaires dont la forme s'apparente à de la rugosité en forme d'"herbe".

Il a été montré que ces microstructures apparaissent dans le cas où la protection du silicium par la couche de passivation devient trop efficace vis à vis du bombardement ionique [178]. Pour mieux pouvoir les observer, nous avons "sacrifié" un échantillon désordonné en le clivant afin d'observer la tranche de ce dernier par Microscopie Electronique à Balayage (MEB). Les images de la figure E.6 ont été réalisées au CRHEA à Sophia-Antipolis par Valérie Mauroy, doctorante au LPMC. Elles montrent la présence d'une forte concentration de colonnes microstructurées d'une hauteur de $55\text{ }\mu\text{m}$, soit environ trois fois l'épaisseur de fond de trou restante.

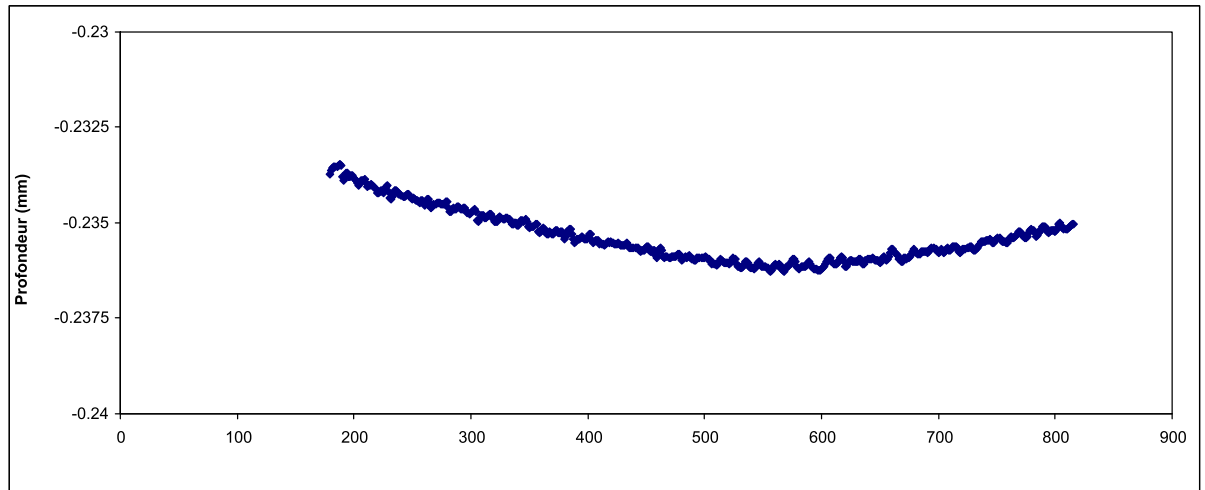


FIGURE E.4 – Profil de gravure en fond de trou.



FIGURE E.5 – Principaux types de défauts de gravure observés.



FIGURE E.6 – Images MEB de la tranche d'un wafer de silicium coupé au niveau d'un trou non traversant de 1 mm de diamètre. La largeur des images est, du haut vers le bas, de 1.5 mm, 150 μm et 15 μm .

Une des conséquences de cette "herbe", évoquée dans le chapitre IV est de modifier la profondeur effective du trou et donc d'en changer ses fréquences de résonance.

Bibliographie

- [1] H. LAMB, “On waves in an elastic plate”. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* **93** (648), 114 –128 (mars 1917).
- [2] VENTSEL, E., KRAUTHAMMER and T., *Thin plates and shells : theory and analysis and and applications*. M. Dekker (2001).
- [3] P. LASAYGUES, “Rappels sur la propagation des ondes élastiques dans les solides anisotropes”. [Polycopié de cours du Master MPM option acoustique donné au LMA and Marseille].
- [4] F. A. AMIRKULOVA, “Dispersion relations for elastic waves in plates and rods”. PhD thesis, University of Rutgers (2011).
- [5] D. ROYER and E. DIEULESAINT, *Ondes élastiques dans les solides. Tome I : Propagation libre et guidée*. Enseignement de la physique, Masson (1996).
- [6] R. E. KUMON, “Non linear surface acoustic waves in cubic crystals”. PhD thesis, The University of Texas (1999).
- [7] G. W. FARNELL, “Types and properties of surface waves”. Dans *Acoustic Surface Waves*, volume 24 de *Topics in Appl. phys.*, volume 24 de *Topics in Appl. phys.*, pages 13–60, Springer Berlin / Heidelberg (1978).
- [8] S. V. BIRYUKOV, Y. V. GULYAEV, V.V KRYLOV and V. P. PLESSKY, *Surface acoustic waves in inhomogeneous media*. Springer series on wave phenomena, Springer-Verlag (1995).

- [9] N. FAVRETTO-CRISTINI, D. KOMATITSCH, J. M. CARCIONE and F. CAVALLINI, “Elastic surface waves in crystals. part 1 : Review of the physics”. *Ultrasonics* **41**, 653 – 660 (2011).
- [10] D. ROYER and D. CLORENNEC, “An improved approximation for the Rayleigh wave equation”. *Ultrasonics* **46** (1), 23 – 24 (2007).
- [11] I. A. VIKTOROV, *Rayleigh and Lamb Waves : Physical Theory and Applications*. Plenum Press and New York (1967).
- [12] E. LE CLÉZIO, “Diffraction des ondes de lamb par des fissures verticales”. Thèse de doctorat, Université de bordeaux I (2001).
- [13] S. D. HOLLAND and D. E. CHIMENTI, “Air-coupled acoustic imaging with zero-group-velocity lamb modes”. *Appl. Phys. Lett.* **83** (13), 2704–2706 (2003).
- [14] I. TOLSTOY and E. USDIN, “Wave propagation in elastic plates : Low and high mode dispersion”. *J. Acoust. Am.* **29** (1), 37–42 (1957).
- [15] C. PRADA, O. BALOGUN and T. W. MURRAY, “Laser-based ultrasonic generation and detection of zero-group velocity lamb waves in thin plates”. *Appl. Phys. Lett.* **87** (19), 194 109 (2005).
- [16] D. CLORENNEC, C. PRADA, D. ROYER and T. W. MURRAY, “Laser impulse generation and interferometer detection of zero group velocity lamb mode resonance”. *Appl. Phys. Lett.* **89** (2), 024 101 (2006).
- [17] D. CLORENNEC, C. PRADA and D. ROYER, “Local and noncontact measurements of bulk acoustic wave velocities in thin isotropic plates and shells using zero group velocity lamb modes”. *J. Appl. phys.* **101** (3), 034 908 (2007).
- [18] O. BALOGUN, T. W. MURRAY and C. PRADA, “Simulation and measurement of the optical excitation of the s1 zero group velocity lamb wave resonance in plates”. *J. Appl. phys.* **102** (6), 064 914 (2007).
- [19] C. PRADA, D. CLORENNEC and D. ROYER, “Local vibration of an elastic plate and zero-group velocity lamb modes”. *J. Acoust. Am.* **124** (1), 203 (2008).
- [20] C. PRADA, D. CLORENNEC and D. ROYER, “Power law decay of zero group velocity lamb modes”. *Wave Motion* **45** (6), 723 – 728 (2008).

- [21] C. PRADA, D. CLORENNÉ, T. W. MURRAY and D. ROYER, “Influence of the anisotropy on zero-group velocity lamb modes”. *J. Acoust. Am.* **126** (2), 620 (2009).
- [22] D. CLORENNÉ, C. PRADA and D. ROYER, “Laser ultrasonic inspection of plates using zero-group velocity lamb modes”. *IEEE Transactions on Ultrasonics and Ferroelectrics and Frequency Control* **57** (5), 1125–1132 (2010).
- [23] S. BRAMHAVAR, C. PRADA, A. MAZNEV, A. EVERY, T. NORRIS and T. MURRAY, “Negative refraction and focusing of elastic lamb waves at an interface”. *Phys. Rev. B* **83** (1) (2011).
- [24] V. G. VESELAGO, “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ”. *Soviet Physics Uspekhi* **10** (4), 509 (1968).
- [25] H. LAMB, “On group-velocity”. *Proceedings of the London Mathematical Society* **2** (1), 473 (1904).
- [26] J. KIM, D. I. CHO and R. S. MULLER, “Why is (111) silicon a better mechanical material for mems?” Dans *Transducers 2001 : 11th Int. Conf. on Solid-State Sensors and Actuators (Munich and Germany)*, pages 662–665 (2001).
- [27] N. FAVRETTO-CRISTINI, “Interaction ondes/interfaces en contexte sismique”. Habilitation à Diriger des Recherches, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II (2011).
- [28] H. J. MCSKIMIN and P. ANDREATCH, “Measurement of third-order moduli of silicon and germanium”. *J. Appl. phys.* **35** (11), 3312–3319 (1964).
- [29] M. A. HOPCROFT, W. D. NIX and T. W. KENNY, “What is the young’s modulus of silicon?” *Journal Of Microelectromechanical Systems* **19** (2), 229–238 (2010).
- [30] J. J. HALL, “Electronic effects in the elastic constants of n -type silicon”. *Phys. Rev.* **161** (3), 756–761 (Sep 1967).
- [31] R. HULL, *Properties of crystalline silicon*. IET (1999).
- [32] A. LOMONOSOV, A. P. MAYER and P. HESS, “3. Laser-based surface acoustic waves in materials science”. Dans *Modern Acoustical Techniques for the Measurement of Mechanical Properties*, pages 65–134, Academic Press (2001).

- [33] P. M. PARKERET and W. G. MAYER, “Method for the determination of elastic constants for some crystallographic groups”. *Acta Crystallographica* **15** (4), 334–336 (1962).
- [34] T. H. MAIMAN, “Stimulated optical radiation in ruby”. *Nature* **187** (4736), 493–494 (1960).
- [35] R. M. WHITE, “Generation of elastic waves by transient surface heating”. *J. Appl. phys.* **34** (12), 3559–3567 (1963).
- [36] J. P. MONCHALIN, “Laser-ultrasonics : From the laboratory to industry”. *AIP Conference Proceedings* **700** (1), 3–31 (2004).
- [37] C.B. SCRUBY, “Some applications of laser ultrasound”. *Ultrasonics* **27** (4), 195 – 209 (1989).
- [38] S. J. DAVIES, C. EDWARDS, G. S. TAYLOR and S. B. PALMER, “Laser-generated ultrasound : its properties and mechanisms and multifarious applications”. *Journal of Physics D : Appl. phys.* **26** (3), 329 (1993).
- [39] J. P. MONCHALIN, “Non contact generation and detection of ultrasound with lasers”. Dans *Proceedings of the 16th World Conference on Nondestructive Testing* (2004).
- [40] B. AUDOIN, T. DEHOUX and Y. GUILLET, “Preface”. *Journal of Physics Conference Series* **278**, 1001 (2011).
- [41] D. ROYER, “Génération et détection optiques d’ondes élastiques” (1996). Techniques de l’ingénieur and Traité Électronique, <http://www.techniques-ingenieur.fr/>.
- [42] T. PÉZERIL, “Génération et détection d’ondes acoustiques transverses picosecondes : théories et expériences”. Thèse de doctorat, Université du Maine (2005).
- [43] M. A. GREEN and M. J. KEEVERS, “Optical properties of intrinsic silicon at 300 k”. *Progress in Photovoltaics : Research and Applications* **3** (3), 189–192 (1995).
- [44] J.D. AUSSEL, A. LE BRUN and J.C. BABOUX, “Generating acoustic waves by laser : theoretical and experimental study of the emission source”. *Ultrasonics* **26** (5), 245 – 255 (1988).

- [45] M. PERTON, “Ultrasons rayonnés par une source laser ponctuelle dans des milieux isotropes transverses et applications à la mesure du tenseur d’élasticité de cylindres et de couches minces”. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I (2006).
- [46] H. MERI, “Rayonnement d’ultrasons générés par laser dans les matériaux anisotropes ; effets de la pénétration optique and de la diffusion de la chaleur et de la diffusion de la densité électronique”. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I (2004).
- [47] B. AUDOIN, H. MERI and C. ROSSIGNOL, “Two-dimensional diffraction of plasma and thermal and elastic waves generated by an infrared laser pulse in semiconductors”. *Phys. Rev. B* **74** (21), 214 304 (2006).
- [48] L. J. BALK, “Scanning electron acoustic microscopy”. *Advances in Electronics and Electron Physics* **71**, 1 – 73 (1988).
- [49] R. G. STEARNS and G. S. KINO, “Effect of electronic strain on photoacoustic generation in silicon”. *Appl. Phys. Lett.* **47** (10), 1048–1050 (1985).
- [50] D. MARTY-DESSUS, M. EZ ZEJJARI, N. BOUGHANMI and J. BOUCHER ET J. L. FRANCESCHI, “Génération d’ondes acoustiques dans le silicium par faisceau d’électrons ou laser modulé”. *Journal de Physique III* **2** (8), 1509–1526 (1992).
- [51] Y. VARSHNI, “Temperature dependence of the energy gap in semiconductors”. *Physica* **34** (1), 149–154 (1967).
- [52] V. GUSEV, A. A. KOLOMENSKII and P. HESS, “Effect of melting on the excitation of surface acoustic wave pulses by uv nanosecond laser pulses in silicon”. *Appl. phys. A : Materials Science and Processing* **61** (3), 285–298 (1995).
- [53] A. M. AINDOW, R. J. DEWHURST, D. A. HUTCHINS and S. B. PALMER, “Laser-generated ultrasonic pulses at free metal surfaces”. *J. Acoust. Am.* **69** (2), 449 – 455 (1980).
- [54] J. F. READY, *Effect of high power radiation*. Academic Press New York (1971).
- [55] I. VLADOIU, M. STAFE, C. NEGUTU and I. M. POPESCU, “The dependence of the ablation rate of metals on nanosecond laser fluence and wavelength”. *Journal of optoelectronics and advanced materials* **10** (12), 3177–3181 (2008).

- [56] A. FRASS, A. LOMONOSOV, P. HESS and V. GUSEV, “Investigation of phase transition thresholds by nonlinear transient laser gratings on silicon surfaces”. *J. Appl. phys.* **87**, 3505 (2000).
- [57] “Pulsed laser deposition (pld)”. <http://www.physandtech.net/index.htm>. [Documentation en ligne sur le thème de la méthode PLD].
- [58] V. TRÉANTON, “Caractérisation de l’interface entre deux matériaux par techniques laser-ultrasons”. Thèse de diplôme, Université de Montreal (1999).
- [59] C. TITRY, “Détection and par ondes de lamb and de la corrosion cachée dans les structures aéronautiques en aluminium”. Thèse de doctorat, Université Paris VII Denis Diderot (2006).
- [60] R. J. DEWHURST and Q. SHAN, “Optical remote measurement of ultrasound”. *Measurement Science and Technology* **10** (11), R139 (1999).
- [61] D. ROYER, E. DIEULESAINT and Y. MARTIN, “Improved version of a polarized beam heterodyne interferometer”. Dans *IEEE 1985 Ultrasonics Symposium*, pages 432–435, IEEE (1985).
- [62] R. K. ING and J. P. MONCHALIN, “Broadband optical detection of ultrasound by two-wave mixing in a photorefractive crystal”. *Appl. Phys. Lett.* **59** (25), 3233–3235 (1991).
- [63] S. DE ROSSI, “Etude et réalisation d’un vibromètre holographique” (2001).
- [64] “Polytec : principes de la vélocimétrie laser”. <http://www.polytec.de/fr/solutions/mesures-de-longueur-et-de-vitesse/principes-de-la-velocimetrie-laser/>.
- [65] B. SAMSON, F. VERPILLAT, M. GROSS and M. ATLAN, “Video-rate laser doppler vibrometry by heterodyne holography”. *Optics Letters* **36** (8), 1449–1451 (2011).
- [66] DRAEGER, CARSTEN, FINK and MATHIAS, “One-channel time reversal of elastic waves in a chaotic 2d-silicon cavity”. *Phys. Rev. Lett.* **79** (3), 407–410 (1997).
- [67] A. ZERWER, “Near surface fracture detection in structural elements : Investigation using rayleigh waves”. PhD thesis, University of Waterloo and Canada (1999).

- [68] D. ALLEYNE and P. CAWLEY, “A two-dimensional fourier transform method for the measurement of propagating multimode signals”. *J. Acoust. Am.* **89** (3), 1159–1168 (1991).
- [69] M. CASTAINGS, “Contrôle et évaluation non destructifs de matériaux par ondes ultrasonores guidées”. Habilitation à Diriger des Recherches, Université de bordeaux I (2002).
- [70] G. RIBAY, “Localisation de source en milieu réverbérant par retournement temporel”. Thèse de doctorat, Université Paris VII Denis Diderot (2006).
- [71] C. E. PORTER and R. G. THOMAS, “Fluctuations of nuclear reaction widths”. *Phys. Rev.* **104** (2), 483–491 (1956).
- [72] H. ALT, H.-D. GRAAF, H. L. HARNEY, R. HOFFERBERT, H. LENGELER, A. RICHTER, P. SCHARDT and H. A. WEIDENMÜLLER, “Gaussian orthogonal ensemble statistics in a microwave stadium billiard with chaotic dynamics : Porter-thomas distribution and algebraic decay of time correlations”. *Phys. Rev. Lett.* **74** (1) (1995).
- [73] H.-J. SOMMERS, Y. FYODOROV and M. TITOV, “*S*-matrix poles for chaotic quantum systems as eigenvalues of complex symmetric random matrices : from isolated to overlapping resonances”. *J. Phys. A : Math. Gen.* **32**, L77 (1999).
- [74] U. KUHLMANN, R. HÖHMANN, J. MAIN and H.-J. STÖCKMANN, “Resonance widths in open microwave cavities studied by harmonic inversion”. *Phys. Rev. Lett.* **100** (25), 254 101 (2008).
- [75] V. V. SOKOLOV and V. G. ZELEVINSKY, “Dynamics and statistics of unstable quantum states”. *Nucl. Phys. 1* **504** (562) (1989).
- [76] R. PNINI and B. SHAPIRO, “Intensity fluctuations in closed and open systems”. *Phys. Rev. E* **54**, R1032 (1996).
- [77] K. PETERMAN, “Calculated spontaneous emission factor for double-heterostructure injection lasers with gain-induced waveguiding”. *IEEE J. Quant. Electron* **15** (7) (1979).
- [78] H. SCHOMERUS, K. FRAHM, M. PATRA and C. BEENAKKER, “Quantum limit of the laser line width in chaotic cavities and statistics of residues of scattering matrix poles”. *Physica A* **278**, 469 (2000).

- [79] C. VANNESTE and P. SEBBAH, “Complexity of two-dimensional quasimodes at the transition from weak scattering to Anderson localization”. *Phys. Rev. A* **79** (4), 041 802–4 (2009).
- [80] H. E. TURECI, L. GE, S. ROTTER and A. D. STONE, “Strong interactions in multimode random lasers”. *Science* **320** (5876), 643 (2008).
- [81] O. LOBKIS and R. WEAVER, “Complex modal statistics in a reverberant dissipative body”. *J. Acoust. Soc. Am.* **108**, 1480 (2000).
- [82] J. BARTHÉLEMY, O. LEGRAND and F. MORTESSAGNE, “Inhomogeneous resonance broadening and statistics of complex wave functions in a chaotic microwave cavity”. *Europhys. Lett.* **70**, 162 (2005).
- [83] O. XERIDAT, C. POLI, O. LEGRAND, F. MORTESSAGNE and P. SEBBAH, “Quasimodes of a chaotic elastic cavity with increasing local losses”. *Phys. Rev. E* **80**, 035 201(R) (2009).
- [84] C. MICHEL, “Chaos ondulatoire en optique guidée : Amplificateur fibré double-gaine pour la génération de modes " scar ".” Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis (2009).
- [85] G. TANNER and N. SÖNDERGAARD, “Wave chaos in acoustics and elasticity”. *J. Phys. A : Math. Theo.* **40**, R443 (2007).
- [86] C. ELLEGAARD, T. GUHR, K. LINDEMANN, H. Q. LORENSEN, J. NYGARD and M. OXBORROW, “Spectral statistics of acoustic resonances in aluminum blocks”. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1546–1549 (1995).
- [87] C. ELLEGAARD, T. GUHR, K. LINDEMANN, J. NYGARD and M. OXBORROW, “Symmetry breaking and spectral statistics of acoustic resonances in quartz blocks”. *Phys. Rev. Lett.* **77** (24), 4918–4921 (1996).
- [88] K. SCHAADT, “Experiments on acoustic chaology and statistical elastodynamics”. Thèse de doctorat, University of Copenhagen (2001).
- [89] C. ELLEGAARD, K. SCHAADT and P. BERTELSEN, “Acoustic chaos”. *Phys. Scrip. T* **90**, 223 (2001).
- [90] R. WEAVER and M. WRIGHT, *New Directions in Linear Acoustics and Vibration : Quantum Chaos, Random Matrix Theory, and Complexity*. Cambridge University Press (2010).

- [91] C. POLI, “Chaos ondulatoire en milieux ouverts : Approche statistique par la théorie des matrices aléatoires non-hermitiennes”. Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis (2009).
- [92] F.-M. DITTES, “The decay of quantum systems with a small number of open channels”. *Phys. Rep.* **339**, 215 (2000).
- [93] J. OKOLOWICZ, M. PLOSZAJCZAK and I. ROTTER, “Dynamics of quantum systems embedded in a continuum”. *Phys. Rep.* **374**, 271 (2003).
- [94] J. BARTHÉLEMY, O. LEGRAND and F. MORTESSAGNE, “Complete S matrix in a microwave cavity at room temperature”. *Phys. Rev. E* **71**, 016 205 (2005).
- [95] H. ISHIO, A. SAICHEV, A. SADREEV and K.-F. BERGGREN, “Wave function statistics for ballistic quantum transport through chaotic open billiards : statistical crossover and coexistence of regular and chaotic waves”. *Phys. Rev. E* **64**, 056 208 (2001).
- [96] H.-J. STÖCKMANN, *Quantum Chaos : an introduction*. Cambridge University Press (1999).
- [97] D. SAVIN, O. LEGRAND and F. MORTESSAGNE, “Inhomogeneous losses and complexness of wave functions in chaotic cavities”. *Europhys. Lett.* **76** (5), 774 (2006).
- [98] S. REE and L. REICHL, “Classical and quantum chaos in a circular billiard with a straight cut”. *Phys. Rev. E* **60**, 1607 (1999).
- [99] M. V. BERRY, “Regular and irregular semiclassical wavefunctions”. *J. Phys. A : Math. Gen* **10** (12), 2083D2091 (1977).
- [100] Y. H. PAO and C. C. CHAO, “Diffractions of flexural waves by a cavity in an elastic plate”. *AIAA Journal* **2**, 2004–2010 (1964).
- [101] C. D. MINDLIN, “Influence of rotary inertia and shear on flexural motion of isotropic and elastic plates”. *J. Appl. mech.* **18**, 31–38 (1951).
- [102] C. D. MINDLIN, “The thickness shear and flexural vibrations of crystal plates”. *J. Appl. phys.* **22**, 316 (1951).
- [103] J. C. P. MCKEON and M. K. HINDERS, “Lamb wave scattering from a through hole”. *Journal of Sound and Vibration* **224** (5), 843 – 862 (1999).

- [104] R. PASKARAMOORTHY, A.H. SHAH and S.K. DATTA, “Scattering of flexural waves by cavities in a plate”. *International Journal of Solids and Structures* **25** (10), 1177 – 1191 (1989).
- [105] V. V. MATUS and V. F. EMETS, “T-matrix method formulation applied to the study of flexural waves scattering from a through obstacle in a plate”. *Journal of Sound and Vibration* **329** (14), 2843 – 2850 (2010).
- [106] F. BENMEDDOUR, S. GRONDEL, J. ASSAAD and E. MOULIN, “Study of the fundamental lamb modes interaction with symmetrical notches”. *NDT & E International* **41** (1), 1 – 9 (2008).
- [107] C. VEMULA and A. N. NORRIS, “Flexural wave propagation and scattering on thin plates using mindlin theory”. *Wave Motion* **26** (1), 1 – 12 (1997).
- [108] A. N. NORRIS and C. VEMULA, “Scattering of flexural waves on thin plates”. *Journal of Sound and Vibration* **181** (1), 115 – 125 (1995).
- [109] T. GRAHN, “Lamb wave scattering from a circular partly through-thickness hole in a plate”. *Wave Motion* **37** (1), 63 – 80 (2003).
- [110] O. DILIGENT, “Interaction between fundamental lamb modes and defects in plates”. PhD thesis, University of London (2003).
- [111] O. DILIGENT and M. J. S. LOWE, “Reflection of the S_0 lamb mode from a flat bottom circular hole”. *J. Acoust. Am.* **118** (5), 2869–2879 (2005).
- [112] F.B. CEGLA, A. ROHDE and M. VEIDT, “Analytical prediction and experimental measurement for mode conversion and scattering of plate waves at non-symmetric circular blind holes in isotropic plates”. *Wave Motion* **45** (3), 162 – 177 (2008).
- [113] A. W. LEISSA, *Vibration of plates*. NASA SP-160 Washington DC (1969).
- [114] J. D. ACHENBACH, *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland Pub. Co. (1973).
- [115] S. HALKJAER, “Elastic wave propagation in anisotropic and inhomogeneous materials”. PhD thesis, Technical University of Denmark (1999).
- [116] P. FROMME and M. B. SAYIR, “Measurement of the scattering of a lamb wave by a through hole in a plate”. *J. Acoust. Am.* **111** (3), 1165–1170 (2002).

- [117] H. W. CHUN and F. K. CHANG, “Scattering of plate waves by a cylindrical inhomogeneity”. *Journal of Sound and Vibration* **282** (1-2), 429 – 451 (2005).
- [118] N. WILKIE-CHANCELLIER, “Réflexion et conversion d’une onde de lamb à l’extrémité biseautée d’une plaque”. Thèse de doctorat, Université du Havre (2003).
- [119] G. RIBAY, S. CATHELIN, D. CLORENNEC, R.-K. ING and M. FINK, “A0 mode interaction with a plate free edge : Theory and experiments at very low frequency by thickness product”. *J. Acoust. Am.* **122** (2), 711–714 (2007).
- [120] J. CUENCA, “Wave models for the flexural vibration of thin plates”. Thèse de doctorat, Université du Maine (2009).
- [121] V. V. KRYLOV and R. E. T. B. WINWARD, “Experimental investigation of the acoustic black hole effect for flexural waves in tapered plates”. *Journal of Sound and Vibration* **300**, 43 – 49 (2007).
- [122] V. B. GEORGIEV, J. CUENCA, F. GAUTIER, L. SIMON and V.V. KRYLOV, “Damping of structural vibrations in beams and elliptical plates using the acoustic black hole effect”. *Journal of Sound and Vibration* **330** (11), 2497 – 2508 (2011).
- [123] M. A. MIRONOV, “Propagation of a flexural wave in a plate whose thickness decreases smoothly to zero in a finite interval”. *Soviet Physics - Acoustics* **34**, 318–319 (1988).
- [124] I. ROTTER, “A non-hermitian hamilton operator and the physics of open quantum systems”. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **42** (15), 153 001 (2009).
- [125] E. PERSSON, K. PICHUGIN, I. ROTTER, and P. SEBA, “Interfering resonances in a quantum billiard”. *Phys. Rev. E* **58** (6), 8001–8004 (1998).
- [126] J. VIRIEUX, “SH-wave propagation in heterogeneous media ; velocity-stress finite-difference method”. *Geophysics* **49** (11), 1933–1942 (1984).
- [127] J. VIRIEUX, “P-SV wave propagation in heterogeneous media : Velocity-stress finite-difference method”. *Geophysics* **51** (4), 889 (1986).

- [128] E. BOSSY, “Evaluation ultrasonore de l’os cortical par transmission axiale : modélisation et expérimentation in vitro et in vivo.” Thèse de doctorat, Université Paris VI (2003).
- [129] O. XERIDAT, E. BOSSY and P. SEBBAH, “Blind hole resonances in a thin plate” (En préparation).
- [130] C. CROËNNE, A.C. HLADKY-HENNION, J. VASSEUR, M. BAVENCOFFE, A. TINEL, B. MORVAN and B. DUBUS, “Left-handed shear and longitudinal elastic waves in 2d phononic crystals made of a solid matrix”. Dans *Proceedings of 20th International Congress on Acoustics (Sidney and Australia)*, pages 633–636 (2010).
- [131] J. B. PENDRY, “Negative refraction makes a perfect lens”. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3966 (2000).
- [132] D. SCHURIG, J. J. MOCK, B. J. JUSTICE, S. A. CUMMER, J. B. PENDRY, A. F. STARR and D. R. SMITH, “Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies”. *Science* **314** (5801), 977–980 (2006).
- [133] M. FARHAT, S. GUENNEAU, S. ENOCH and A. B. MOVCHAN, “Cloaking bending waves propagating in thin elastic plates”. *Phys. Rev. B* **79** (3), 033 102 (2009).
- [134] P. W. ANDERSON, “Absence of diffusion in certain random lattices”. *Phys. Rev.* **109** (5), 1492–1505 (1958).
- [135] S. JOHN, “Electromagnetic absorption in a disordered medium near a photon mobility edge”. *Phys. Rev. Lett.* **53** (22), 2169 (1984).
- [136] D. S. WIERSMA, P. BARTOLINI, A. LAGENDIJK and R. RIGHINI, “Localization of light in a disordered medium”. *Nature* **390** (6661), 671–673 (1997).
- [137] C. M. AEGERTER, M. STÖRZER, W. BÜHRER, S. FIEBIG and G. MARET, “Experimental signatures of Anderson localization of light in three dimensions”. *Journal of Modern Optics* **54** (16-17), 2667–2677 (2007).
- [138] A. A. CHABANOV, M. STOYTCHIEV, and A. Z. GENACK, “Statistical signatures of photon localization”. *Nature* **404** (6780), 850–853 (2000).

- [139] D. LAURENT, O. LEGRAND, P. SEBBAH, C. VANNESTE and F. MORTES-SAGNE, “Localized modes in a finite-size open disordered microwave cavity”. *Phys. Rev. Lett.* **99** (25), 253 902 (2007).
- [140] I. GRAHAM, L. PICHÉ and M. GRANT, “Experimental evidence for localization of acoustic waves in three dimensions”. *Phys. Rev. Lett.* **64** (26), 3135–3138 (1990).
- [141] L. MACON, J. P. DESIDERI and D. SORNETTE, “Localization of surface acoustic waves in a one-dimensional quasicrystal”. *Phys. Rev. B* **44** (13), 6755–6772 (1991).
- [142] C. H. KUO, K. WANG and Z. YE, “Fluctuation and localization of acoustic waves in bubbly water”. *Appl. Phys. Lett.* **83**, 4247 (2003).
- [143] A. LAGENDIJK, B. VAN TIGGELEN and D. S. WIERSMA, “Fifty years of Anderson localization”. *Physics Today* **62**, 24–29 (2009).
- [144] “50 years of Anderson localization canon”. <http://www.andersonlocalization.com/>. [Site internet consacré aux 50 ans de la localisation d’Anderson].
- [145] N. CHERRORET, “Transport cohérent en milieu aléatoire : des corrélations mésoscopiques à la localisation d’Anderson”. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier (2009).
- [146] P. SHENG, *Introduction to wave scattering and localization and mesoscopic phenomena*. Springer (2006).
- [147] B. VAN TIGGELEN, “Localization of waves” (1998). Course at Les Houches.
- [148] R. L. WEAVER, “Anderson localization of ultrasound”. *Wave Motion* **12** (2), 129 – 142 (1990).
- [149] L. YE, G. CODY, M. ZHOU, P. SHENG and A. N. NORRIS, “Observation of bending wave localization and quasi mobility edge in two dimensions”. *Phys. Rev. Lett.* **69** (21), 3080 (1992).
- [150] O. LOBKIS and R. WEAVER, “Anderson localization of ultrasound in plates : Further experimental results”. *J. Acoust. Am.* **124** (6), 3528 (2008).

- [151] H. HU, A. STRYBULEVYCH, A. J. H. PAGE, S. E. SKIPETROV and B. A. VAN TIGGELEN, “Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network”. *Nature Physics* **4** (12), 945–948 (2008).
- [152] A. A. CHABANOV and A. Z. GENACK, “Statistics of dynamics of localized waves”. *Phys. Rev. Lett.* **87** (23), 233 903 (2001).
- [153] Z. YE and A. ALVAREZ, “Acoustic localization in bubbly liquid media”. *Phys. Rev. Lett.* **80** (16), 3503 (1998).
- [154] Z. YE, H. HSU, E. HOSKINSON and A. ALVAREZ, “On localization of acoustic waves”. *Chinese Journal of Physics* **37**, 343 (1999).
- [155] A. ALVAREZ and Z. YE, “Localization transition in acoustic propagation in bubbly liquids”. *Physics Letters A* **252**, 53 – 57 (1999).
- [156] B. VAN TIGGELEN, A. LAGENDIJK, A. TIPET and G. F. REITER, “Effect of resonant scattering on localization of waves”. *EPL (Europhysics Letters)* **15**, 535 (1991).
- [157] C. VANNESTE and P. SEBBAH, “Localized modes in random arrays of cylinders”. *Phys. Rev. E* **71**, 026 612 (2005).
- [158] A. LAGENDIJK and B. VAN TIGGELEN, “Resonant multiple scattering of light”. *Physics Reports* **270** (3), 143–215 (1996).
- [159] A. TOURIN, “Ondes en milieux complexes”. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris VII (2005).
- [160] S. E. SKIPETROV and B. A. VAN TIGGELEN, “Dynamics of Anderson localization in open 3d media”. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 043 902 (2006).
- [161] E. ABRAHAMS, P. W. ANDERSON, D.C. LICCIARDELLO and T. V. RAMAKRISHNAN, “Scaling theory of localization : Absence of quantum diffusion in two dimensions”. *Phys. Rev. Lett.* **42** (10), 673 (1979).
- [162] “Localization : theory and experiment ” **56**.
- [163] T. SCHWARTZ, G. BARTAL, S. FISHMAN and M. SEGEV, “Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices”. *Nature* (7131), 52–55 (2007).

- [164] O. XERIDAT, O. GAUTHIER-LAFAYE, D. BELHARET, S. BONNEFONT, F. LOZES-DUPUYS and P. SEBBAH, "Observation of 2D Anderson localization for flexural waves scattered by randomly-distributed blind holes in a silicon plate" (En préparation).
- [165] M. REUFER, L.F. ROJAS-OCHOA, S. EIDEN, J. J. SAENZ and F. SCHEFFOLD, "Transport of light in amorphous photonic materials". *Appl. Phys. Lett.* **91** (17), 171 904 (2007).
- [166] A. PERES, "Stability of quantum motion in chaotic and regular systems". *Phys. Rev. A* **30** (4), 1610 (1984).
- [167] R. FORTUNIER, "Contraintes". http://mms2.ensmp.fr/mmc_st_etienne_fort/contraintes/polycop/contraintes_poly.pdf. [cours en ligne de Mécanique des milieux continus - ENS Mines de Saint Etienne].
- [168] G. CAILLETAUD, "Structures et matériaux composites". http://mms2.ensmp.fr/mms_paris/plaque/polycop/f_plaque_poly.pdf. [cours en ligne de Mécanique des matériaux solides - ENS Mines de Paris].
- [169] R. FORTUNIER, "Calcul tensoriel". http://mms2.ensmp.fr/mmc_st_etienne_fort/calcul_tensoriel/polycop/tenseurs_poly.pdf. [cours en ligne de Mécanique des milieux continus - ENS Mines de Saint Etienne].
- [170] C. A. FELIPPA, "Kirchhoff plates : Field equations". <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/AFEM.Ch26.d/AFEM.Ch26.pdf>. [cours en ligne du Center for Aerospace Structures (CAS) and Université du Colorado].
- [171] "Théorie des plaques". <http://siterdm.free.fr/Complements/plaques.pdf>. [cours de DEA en ligne].
- [172] G. KIRCHHOFF, "Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe". *journal für Math. (Crelle)* **40** (1850).
- [173] C. A. FELIPPA, "Thin plate bending elements : Overview". <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/AFEM.Ch28.d/AFEM.Ch28.pdf>. [cours en ligne du Center for Aerospace Structures (CAS) and Université du Colorado].
- [174] S. TIMOSHENKO and S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of plates and shells*. New York : McGraw-Hill (1940).

-
- [175] “Bessel’s differential equation”. <http://www.efunda.com/math/bessel/bessel.cfm>. [ressources de calculs pour l’ingénieur en ligne (engineering Fundamentals)].
- [176] C. DULUARD, “Etude de nouvelles voies de passivation non polymérisante pour la gravure profonde du silicium”. Thèse de doctorat, Université d’Orléans (2009).
- [177] O. GAUTHIER-LAFAYE, D. BELHARET, S. BONNEFONT and F. LOZES-DUPUYS, “Réunion LPMC - LAAS ” (25 novembre 2008). [Présentation effectuée par l’équipe photonique du LAAS dans le cadre du projet PEPS acoustique avec le LPMC].
- [178] X. MELLHAOUI, “Mécanismes physico-chimiques dans le procédé de gravure plasma du silicium”. Thèse de doctorat, Université d’Orléans (2006).

Résumé :

Les ondes élastiques qui se propagent dans les plaques minces constituent un outil performant pour l'étude fondamentale des ondes en milieux complexes. Elles permettent d'élaborer des dispositifs expérimentaux de taille macroscopique, large bande et non invasifs lorsque la génération et la détection des ultrasons sont effectuées par laser. L'outil expérimental développé dans le cadre de cette thèse permet d'une part l'accès direct à la dynamique temporelle du champ de vibration normale des ondes de Lamb et d'autre part de dresser les cartographies spatiales d'amplitude et de phase des modes propres par traitement numérique. Les milieux complexes étudiés sont de deux types : les milieux homogènes chaotiques ouverts et les milieux hétérogènes fortement diffusants. Pour les premiers, on s'intéresse aux effets de l'ouverture du système fermé vers l'extérieur sur les caractéristiques spectrales et spatiales des modes. Pour ce faire, une série d'expériences est réalisée à la surface d'un wafer de silicium de forme chaotique avec un taux de pertes locales variable. Une seconde étude a trait au problème de la diffusion des ondes de Lamb par un trou non traversant : le trou " borgne ". Ses caractéristiques de résonateur basse fréquence permettent de disposer d'un grand nombre de diffuseurs efficaces dans un volume réduit. Dans de tels milieux désordonnés, les interférences entre les ondes multiples diffusées peuvent bloquer la propagation des ondes : c'est le phénomène de "localisation d'Anderson" qui fait l'objet de la dernière partie de ce travail. On y décrit l'élaboration puis l'analyse d'un milieu localisant constitué d'une plaque de silicium contenant une collection aléatoire de trous borgnes.

Mots clés : ondes de Lamb, diffusion multiple, chaos ondulatoire, localisation d'Anderson.

Abstract :

Elastic waves propagating in thin plates are an efficient tool for the fundamental study of waves in complex media. They allow developing experimental setups of macroscopic size, broadband and non-invasive when the generation and detection of ultrasounds are performed by laser. The experimental tool developed in this thesis allows direct access to the whole time dynamics of Lamb wave normal displacements. The amplitude and phase spatial distribution of the modes are obtained by Fourier transform of time measurements. We study two kinds of complex media : homogeneous ones with chaotic shape and heterogeneous ones. For the first, we look at how a closed chaotic medium is modified when it is progressively coupled with the environment. For this, a series of experiments is carried out on a chaotic silicon wafer with increasing local losses. A second study deals with Lamb waves scattering by a non through-hole : the "blind" hole. This scatterer exhibits a high scattering strength thanks to its internal resonances. Thus, it can be used to build complex heterogeneous systems. In such media, waves can be spatially trapped by the disorder, due to complex interference processes. This phenomenon, known as "Anderson localization", is studied in the last part of this work. We describe the conception and experimental analysis of a randomly etched silicon wafer containing about 3400 blind holes.

Keywords : Lamb waves, multiple scattering, wave chaos, Anderson localization.